基礎数学選書 23

テンソル解析

田代嘉宏 著

復刊

裳華房

基礎数学選書

23

テンソル解析

広島大学名誉教授
理学博士

田代嘉宏著

裳華房

編 集 趣 旨

最近の科学技術の発展には誠に目覚しいものがあります．それにつれてその基礎であり，その手段である数学の重要性はますます増大しつつあります．

また一方，いままでは主として科学技術の方面にのみ応用をもっていると思われていた数学が，最近になって実は，人間のあらゆる社会活動を対象とする行動科学の方面にも非常に大きな応用をもっていることが明らかになってまいりました．

このように，科学技術と行動科学の２つの方面からの社会的要求はますます増大する一方ですので，大学における数学教育の比重はますます大きくなりつつあります．

しかしながら誠に残念なことに，大学の講義時間には大きな制限があるために，講義がややもすれば型通りになりがちで，学生の数も毎年増加の一途をたどっていますので，講義だけで学生が将来必要な数学をマスターするということはますます困難になりつつあるのが現状です．

このような状態のもとで，大学の講義を十分に理解し，それを活用する力を十分に身につけるには，初学者の心理も盲点も知りつくしている経験豊かな著者の手になる懇切丁寧な参考書によるのが一番よい方法です．

ややもすれば，大学生相手の書物には読者をつきはなしたような態度が多いのですが，その点を改め，読者諸君が素直に読み進むことができ，しかもそれによって厳密で豊富な知識が身につき，理論に対する真の興味がわいてくるようにと念願して企画されたのが，この「基礎数学選書」であります．

本選書は，以上の趣旨に基づいて，数学の種々の分科を１つ１つ教科書風の堅苦しさから解放された自由な立場から，できるだけ詳細に解説するという目的で，比較的多くの小冊子に分けられています．

読者諸君は，この選書のうちから諸君が必要とされるもの，興味をもたれるものを自由に選ぶことができると思います．

編集委員会は，この選書に入れた項目で，将来数学を活用しようとする人たちに必要なものはほとんど網羅していると信じます．

また，将来それを活用する場合，数学はこの選書に解説されている内容で十分役立つと確信します．

したがって，これらの選書で学習し，それらを書棚においておかれるならば，社会にでて数学を活用する場合にも大いに役立つことを信じて疑わないものであります．

昭和44年8月

矢野健太郎
国沢清典
茂木勇
石原繁
岩堀長慶

まえがき

テンソルは普通には，質点系・流体・弾性体の力学や電磁気学の中で，ベクトル解析の延長として現われてくる．テンソルの定義や表現方法はいろいろあって，線形変換または行列として表現される場合，成分とその変換法則によって定義される場合，またベクトルから構成されるダイアディクの概念を用いる方法などがある．

ところが，多くの場合それぞれの理論の目的に沿った形で定義されていて，一見してそれらが同一の対象物のいくつかの容態であると理解されにくい感がある．

本書は，力学・電磁気学などでテンソルに初めて出会ったとき，そのような各種の表現方法に戸惑いを感じる読者のために，テンソルの本質的な意味と性質・関係をやさしい形で詳しく説明することを目的としている．一言でいえば，物理学に現われるテンソルの数学的解説書である．

そのため，本書では普通の空間すなわち3次元ユークリッド空間におけるテンソル代数および解析を述べるに止め，テンソル解析の活躍するもう一つの場である微分幾何学にくわしくは立ち入らないことにした．しかし，後者の手法を考慮して取り扱っているから，微分幾何学への入門の役割も果しているであろう．

本書の執筆をお勧め下さった恩師矢野健太郎先生はじめ編集委員の方々に厚く御礼を述べるとともに，お引き受けしてから印刷まで予定より大幅に延びてしまった期間を，辛抱強く待ちまた精力的に編集にあたって下さった裳華房の遠藤恭平，細木周治，桑原由有子の諸氏に心から感謝の意を表したい．

昭和56年1月

田　代　嘉　宏

目　　次

1.　テンソル代数

2.　直交テンソル解析

3.　テンソル解析の応用

4.　一般のテンソル代数

5.　一般のテンソル解析

1 テンソル代数

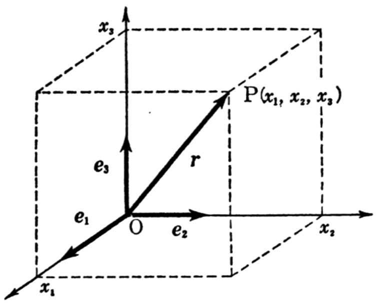
§1. ベクトル

テンソル（tensor）という術語は，緊張を意味するラテン語の tensio からきている．その語源のように，テンソルは弾性体の力学の中で張り合う応力（張力）を表すために，ベクトルより一般の量として初めて登場した．その後，各種の力学や電磁気学の中でいろいろの量を表現するために，テンソルは有効な手段として用いられている．

一方，数学においてはテンソルの代数的な定式化が行われ，リーマン幾何学に始まる現代微分幾何学では，非常に優れた表現方法として，縦横に用いられている．

第1章では普通の空間，すなわち3次元ユークリッド空間において，直交座標系に関するベクトルおよびテンソルの代数的性質を取り扱う．

空間内に1つの直交座標系をとり，その原点を O とし，座標軸上の単位ベクトルを e_1, e_2, e_3 とする．それらを座標系の**基本ベクトル**という．一般に，それぞれが単位ベクトルであり，かつ互いに直交するようなベクトルで作られる基底を**正規直交基底**という．以下，簡単に**直交基底**という．基本ベクトル e_1, e_2, e_3 で作られる基底は直交基底であり，それを $\Sigma\{e_1, e_2, e_3\}$ で示し，また原点を明示する必要があるときは $\Sigma\{O, e_1, e_2, e_3\}$ で示すことにする．



1-1 図

1つの直交基底 Σ に関して，点の座標は普通 (x, y, z) が用いられるが，今後一般に直交座標を扱うときは

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z$$

とおき，点の座標を (x_1, x_2, x_3) または簡単に (x_i) と書く．問題が特定の座標系に関して特別な形で記述されているときは，上記のような座標の読み替えを随時行うことにする．

点 $\mathrm{P}(x_i)$ の原点 O に関する位置ベクトル $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は

(1)
$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$$

で表される．

空間のベクトル $\boldsymbol{a}$ は基底 Σ に関して基本ベクトルの1次結合

(2)
$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i\boldsymbol{e}_i$$

で表され，この表し方は一意的である．(a_1, a_2, a_3) をベクトル $\boldsymbol{a}$ の Σ に関する**成分**といい，Σ が定まっているときベクトル $\boldsymbol{a}$ を

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) \qquad \text{または簡単に} \qquad \boldsymbol{a} = (a_i)$$

と書く．

ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_i)$ と $\boldsymbol{b} = (b_i)$ に対して，内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ は

(3)
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_ib_i$$

で与えられる．ベクトル $\boldsymbol{a}$ の長さ $|\boldsymbol{a}|$ は

(4)
$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

で与えられる．内積の記号を用いれば

(5)
$$|\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3 = \sum_{i=1}^{3} a_ia_i$$

と表すことができる．2つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ は

(6)
$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$$

で与えられる．

ベクトル $\boldsymbol{a}$ が単位ベクトル，すなわちその長さが1であることは

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = 1$$

であり，また $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が互いに直交しているための条件は

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$$

である．したがって，$\Sigma\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ が直交基底であること，すなわち $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ が単位ベクトルであり，かつ互いに直交していることは

（7）
$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

で特徴づけられる．

（8）
$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

で定義される記号 δ_{ij} を**クロネッカーのデルタ**といい，これを用いれば式 (7) を一まとめにして

（7′）
$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij} \qquad (i, j=1, 2, 3)$$

と書くことができる．

定理 1.1　任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, 任意のスカラー k について，内積は次の性質をもつ．

（i）　対称性　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

（ii）　双1次性　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

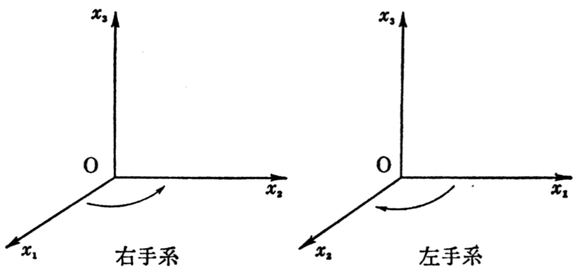
$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$

$(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(k\boldsymbol{b})=k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$

（iii）　正定値性　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\geqq 0$

ここで等号が成り立つのは $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ のとき，そしてそのときに限る．

直交座標系 (x_1, x_2, x_3) の x_1 軸の正方向から x_2 軸の正方向へ 90° 回転する向きが x_3 軸の正方向に対して右回転になるときその座標系は**右手系**で



1-2 図

あるといい，左回転になるとき**左手系**であるという．空間内でそのいずれか一方の回転の向きを固定するとき，空間に**方向を付ける**という．普通，右手系を選ぶことにする．

3つのベクトル $\boldsymbol{a}=(a_i)$, $\boldsymbol{b}=(b_i)$, $\boldsymbol{c}=(c_i)$ に対して，それらの成分で作られる行列式を

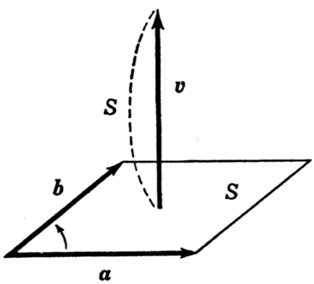
$$|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{9}$$

で表す．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が互いに1次独立であるための，したがって $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ が基底をなすための必要十分条件は

$$|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|\neq 0$$

である．そして行列式 $|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|$ の値が正であるか負であるかに従って，基底 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ は（基底 Σ に関して）**正**または**負の向き**であるという．

零ベクトルでない2つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して，次の性質をもつベクトル $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**外積**または**ベクトル積**といい，記号 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ または $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ で表す．



1-3 図

（i）$\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{a}$,　　$\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{b}$

（ii）$\boldsymbol{v}$ の長さは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積に等しい．

（iii）$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}\}$ はこの順序で正の向きをもつ．$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ のときは，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に垂直な方向は定まらないが，それらの作る平行四辺形は退化して面積は0であるから，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ と定義する．そのとき

定理 1.2　ベクトル $\boldsymbol{a}=(a_i)$ と $\boldsymbol{b}=(b_i)$ のベクトル積 $\boldsymbol{v}=(v_i)$ の成分は次の式で与えられる．

$$(v_1, v_2, v_3)=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$
$$=\left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

3つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して，ベクトル積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の内積は

(10) $$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} c_1-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} c_2+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} c_3$$
$$=|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|$$

であり，これを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の**スカラー3重積**または単に**3重積**という．この図形的な意味は

定理 1.3 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ が正の向きであるとき，スカラー3重積 $|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が作る平行六面体の体積に等しい．

次の公式が成り立つ．

(11) $$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$$

(12) $$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$$

この左辺を**ベクトル3重積**という．

(13) $$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$$

(14) $$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d} \end{vmatrix}$$

(15) $$|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}||\boldsymbol{d}\ \ \boldsymbol{e}\ \ \boldsymbol{f}|=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{f} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{f} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{f} \end{vmatrix}$$

問　　題

1. ベクトル $\boldsymbol{a}=(a_i)$, $\boldsymbol{b}=(b_i)$ の作る平行四辺形の面積を S とするとき，次の式が成り立つことを証明せよ．

$$S^2=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2$$

2. 定理 1.2 を証明せよ．

3. 定理 1.3 を証明せよ．

4. 等式 (11)～(15) を証明せよ．

5. $\boldsymbol{a}=(3, -2, 2)$, $\boldsymbol{b}=(3, 2, -1)$, $\boldsymbol{c}=(1, 4, -3)$ のとき，次の値またはベクトルを求めよ．

(1) $|\boldsymbol{a}|$　　(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$　　(3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$　　(4) $|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|$

[解　　答]

1. $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすれば，$S=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$.

$$S^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\theta=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$$
$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$
$$=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

2. $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{b}$ であるから $a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3=0$, $b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3=0$. これを v_1, v_2, v_3 について解けば

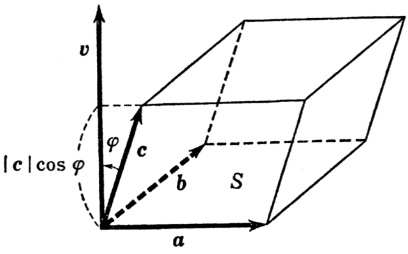
$$v_1=k\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix},\qquad v_2=k\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix},\qquad v_3=k\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$$

と表される（k は比例因数）. $|\boldsymbol{v}|^2=S^2$ にこれらの式および問題 **1** の結果を代入して，$k^2=1$. 一方，$|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{v}|=kS^2>0$ であるから $k=1$.

3. $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ のなす角を φ とすれば $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{c}|\cos\varphi$.　$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ が正の向きをなすから

$$|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{c}>0.$$

ゆえに $|\boldsymbol{c}|\cos\varphi>0$ であって，これは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の作る平面に対する平行六面体の高さである．したがってその平行六面体の体積は $|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|$ に等しい．



1-4 図

4. (11) 行列式の性質により

$$|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}|$$

(12) $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(v_i)$ として，左辺のベクトル3重積の第1成分は

$$v_2c_3-v_3c_2=(a_3b_1-a_1b_3)c_3-(a_1b_2-a_2b_1)c_2$$
$$=(a_3c_3+a_2c_2)b_1-(b_3c_3+b_2c_2)a_1$$
$$=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_1-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})a_1.$$

第 2，第 3 成分は上の式で b_1, a_1 を b_2, a_2 または b_3, a_3 でおき換えた式になる．

(13) 各項に式 (12) を適用すればよい．

(14) $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$ を1つのベクトルと考えて式 (11) を用いれば，

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=((\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$$
$$=\{(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{d}-(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}\}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$

(15) $$|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}||\boldsymbol{d}\ \ \boldsymbol{e}\ \ \boldsymbol{f}|=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}d_1 & e_1 & f_1\\ d_2 & e_2 & f_2\\ d_3 & e_3 & f_3\end{vmatrix}=\text{右辺の行列式}$$

5. (1) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{17}$

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\cdot3+(-2)\cdot2+2\cdot(-1)=3$

(3) $$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left(\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}3 & 3\\ -2 & 2\end{vmatrix}\right)=(-2, 9, 12)$$

$$(4)\quad |\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -2$$

§2. テンソルの定義

2つの任意のベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対して実数を対応させる関数，簡単にいえば2つのベクトル変数の関数 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ であって，任意のベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ およびスカラー $\boldsymbol{k}$ に対して

$$(1)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \\ \boldsymbol{T}(k\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) \\ \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, k\boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \end{cases}$$

が成り立つようなものを考えよう．

式 (1) は第1のベクトル変数についての線形性，式 (2) は第2のベクトル変数についての線形性を示しており，合わせて**双線形性**という．このように，双線形性をもつ2個のベクトル変数の関数 $\boldsymbol{T}$ を **2階のテンソル**という．

ベクトルの内積 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ は任意の2つのベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対して実数を与えるから，2個のベクトル変数の関数と考えることができる．それを

$$(3)\qquad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$$

と表せば，定理 1.1 (ii) で述べたように関数 $\boldsymbol{g}$ は双線形性をもっている．関数 $\boldsymbol{g}$ を2階のテンソルと考えることができる．

空間に直交基底 $\Sigma\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ をとるとき，基本ベクトルに対するテンソル $\boldsymbol{T}$ の値を

$$(4)\qquad \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = T_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

とおこう．i と j のいろいろの組について，

$$(5)\qquad \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

の9個の値が得られる．

任意のベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ が基底 Σ に関して

$$
(6)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i\boldsymbol{e}_i \\ \boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{j=1}^{3} v_j\boldsymbol{e}_j \end{cases}
$$

と表されているとすれば，$\boldsymbol{T}$ の双線形性 (1), (2) により $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対する値は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{T}(u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3, v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3) \\
&= \boldsymbol{T}(u_1\boldsymbol{e}_1, v_1\boldsymbol{e}_1) + \boldsymbol{T}(u_1\boldsymbol{e}_1, v_2\boldsymbol{e}_2) + \boldsymbol{T}(u_1\boldsymbol{e}_1, v_3\boldsymbol{e}_3) \\
&\quad + \boldsymbol{T}(u_2\boldsymbol{e}_2, v_1\boldsymbol{e}_1) + \boldsymbol{T}(u_2\boldsymbol{e}_2, v_2\boldsymbol{e}_2) + \boldsymbol{T}(u_2\boldsymbol{e}_2, v_3\boldsymbol{e}_3) \\
&\quad + \boldsymbol{T}(u_3\boldsymbol{e}_3, v_1\boldsymbol{e}_1) + \boldsymbol{T}(u_3\boldsymbol{e}_3, v_2\boldsymbol{e}_2) + \boldsymbol{T}(u_3\boldsymbol{e}_3, v_3\boldsymbol{e}_3) \\
&= u_1v_1\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + u_1v_2\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + u_1v_3\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) \\
&\quad + u_2v_1\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) + u_2v_2\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) + u_2v_3\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \\
&\quad + u_3v_1\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) + u_3v_2\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) + u_3v_3\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) \\
&= u_1v_1T_{11} + u_1v_2T_{12} + u_1v_3T_{13} \\
&\quad + u_2v_1T_{21} + u_2v_2T_{22} + u_2v_3T_{23} \\
&\quad + u_3v_1T_{31} + u_3v_2T_{32} + u_3v_3T_{33}
\end{aligned}
$$

となる．この計算は総和の記号を用いて

$$
(7)\qquad \begin{aligned}
\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{T}\Big(\sum_{i=1}^{3} u_i\boldsymbol{e}_i, \sum_{j=1}^{3} v_j\boldsymbol{e}_j\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{T}(u_i\boldsymbol{e}_i, v_j\boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} u_iv_j\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} T_{ij}u_iv_j
\end{aligned}
$$

のようにまとめて書くことができる．したがって，基本ベクトルに対する $\boldsymbol{T}$ の9個の値 T_{ij} を知れば，任意のベクトル $\boldsymbol{u}=(u_i)$, $\boldsymbol{v}=(v_i)$ に対する値 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ を知ることができる．(T_{ij}) を2階のテンソル $\boldsymbol{T}$ の，基底 Σ に関する**成分**という．

空間におけるベクトルの線形変換 T は，普通 (5) の形の3次の正方行列で表される．任意のベクトル $\boldsymbol{v}=(v_i)$ に T を作用して得られるベクトルを $\bar{\boldsymbol{v}} = T(\boldsymbol{v}) = (\bar{v}_i)$ とするとき，$\bar{\boldsymbol{v}}$ の成分は

$$
\begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}
$$

すなわち

$$\bar{\boldsymbol{v}} = T(\boldsymbol{v}) \ ; \qquad \bar{v}_i = \sum_{j=1}^{3} T_{ij} v_j \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{8}$$

で与えられる．線形変換は線形性

$$\begin{cases} T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{w}) \\ T(k\boldsymbol{v}) = kT(\boldsymbol{v}) \end{cases} \tag{9}$$

を満たしている．

この線形変換を次のようにして2階のテンソルと考えることができる．物理学におけるテンソルは線形変換として現われることが多い．

ベクトル $\boldsymbol{v}$ の線形変換 T による像 $T(\boldsymbol{v})$ と任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ との内積は実数であるから，これを

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \cdot T(\boldsymbol{v}) \tag{10}$$

とおく．そのとき $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ は2個のベクトル変数 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ の実数値関数と考えることができる．また，線形変換も内積も線形性をもっているから，式 (10) で定義された関数 $\boldsymbol{T}$ は双線形性を満たしている．したがって，$\boldsymbol{T}$ は2階のテンソルである．その成分は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) &= \boldsymbol{e}_i \cdot T(\boldsymbol{e}_j) \\ &= (T(\boldsymbol{e}_j) \text{ の第 } i \text{ 成分}) = T_{ij} \end{aligned}$$

で与えられ，線形変換の行列の成分と一致する． 今後， 一般に行列 (T_{ij}) で表される線形変換と対応する2階のテンソルをそれぞれ T と $\boldsymbol{T}$ で表す．

任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対してそれ自身を対応させる線形変換

$$I(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$$

は**恒等変換**といわれる．式 (10) と同様に

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \cdot I(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$$

とおけば，$\boldsymbol{I}$ は2階のテンソルである．その成分は

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$$

であり，$\boldsymbol{I}$ は単位行列

$$\boldsymbol{I} = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で表される．このテンソル $\boldsymbol{I}$ を**単位テンソル**という．

2階のテンソルを，ベクトル変数について双線形性をもつ実数値関数として定義したが，ベクトル自身これと類似な性質をもつ実数値関数と考えることができる．

ある特定のベクトル $\boldsymbol{a}=(a_i)$ と任意のベクトル $\boldsymbol{v}=(v_i)$ との内積

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{3}a_i v_i$$

は実数である．これをベクトル変数 $\boldsymbol{v}$ の関数と考え，

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}$$

と表せば，線形性

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{v})+\boldsymbol{a}(\boldsymbol{w})\\ \boldsymbol{a}(k\boldsymbol{v})=k\boldsymbol{a}(\boldsymbol{v})\end{cases}$$

が成り立つ．すなわち，ベクトル $\boldsymbol{a}$ はそれ自身，1個のベクトル変数について線形性をもつ実数値関数であると考えることができる．それゆえ，ベクトルをまた**1階のテンソル**という．基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ に対する $\boldsymbol{a}$ の値は

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i=a_i$$

であり，$\boldsymbol{a}$ のもともとの第 i 成分と一致している．とくに

$$\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{e}_j)=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij} \tag{11}$$

である．

一般に p 個の任意のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_p$ に対して実数値

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_p)$$

を対応させる関数 $\boldsymbol{T}$ があって，それぞれのベクトル変数について線形性

$$\begin{cases}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{v}_r', \cdots, \boldsymbol{v}_p)\\ \quad =\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r, \cdots, \boldsymbol{v}_p)+\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r', \cdots, \boldsymbol{v}_p)\\ \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}_1, \cdots, k\boldsymbol{v}_r, \cdots, \boldsymbol{v}_p)=k\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r, \cdots, \boldsymbol{v}_p)\end{cases} \tag{12}$$

$$(r=1, 2, \cdots, p)$$

が成り立つとき，関数 $\boldsymbol{T}$ を **p 階のテンソル**といい，p をそのテンソルの**階数**という．式 (12) の性質を**多線形性**という．

実数すなわちスカラーはそれ自身**0階のテンソル**と見なされる．

ここでは，ベクトル，テンソルを空間の直交基底に対比して考えているので，のちに第4章で述べる一般のテンソルと区別して，正確には**直交性ベクトル，直交性テンソル**（**カーテシァン・ベクトル，カーテシァン・テンソル**）というべきである．第1～3章では直交性のものだけを取り扱うので，その間は単にテンソル，ベクトルといえば直交性のものを指すことにする．

物理学に現われるテンソルの例はほとんど4階までであるし，簡単にして見易くするため，今後の説明は2階または3階など階数の低いテンソルについて行うことにする．

式(4)以下で2階のテンソルについて述べたと同じように，一般に空間に1つの直交基底 $\Sigma\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ を選んだとき，テンソル $\boldsymbol{T}$ は基本ベクトルに対する値によって特徴づけられる．いま $\boldsymbol{T}$ を3階のテンソルとし，

$$T_{ijk} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k) \qquad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

とおいて，合計 27 個の値が得られる．任意のベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ の Σ に関する成分を

$$\boldsymbol{u} = (u_i), \quad \boldsymbol{v} = (v_i), \quad \boldsymbol{w} = (w_i)$$

とすれば，

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{3} u_i \boldsymbol{e}_i, \qquad \boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{3} v_j \boldsymbol{e}_j, \qquad \boldsymbol{w} = \sum_{k=1}^{3} w_k \boldsymbol{e}_k$$

であるから，$\boldsymbol{T}$ の線形性により，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ に対する $\boldsymbol{T}$ の値は

$$
\begin{aligned}
(13) \qquad \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) &= \boldsymbol{T}\Big(\sum_{i=1}^{3} u_i \boldsymbol{e}_i, \sum_{j=1}^{3} v_j \boldsymbol{e}_j, \sum_{k=1}^{3} w_k \boldsymbol{e}_k\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \boldsymbol{T}(u_i \boldsymbol{e}_i, v_j \boldsymbol{e}_j, w_k \boldsymbol{e}_k) \\
&= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} u_i v_j w_k \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k) \\
&= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} T_{ijk} u_i v_j w_k
\end{aligned}
$$

で与えられる．ゆえに T_{ijk} がわかれば，任意のベクトルに対する $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ の値がわかる．

このように，空間に1つの直交基底 $\Sigma\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ を選ぶとき，3階のテンソル $\boldsymbol{T}$ は $3^3 = 27$ 個の数値 T_{ijk} で表される．これらの数 T_{ijk} をテンソル $\boldsymbol{T}$ の基底 Σ に関する**成分**といい，必要に応じて $\boldsymbol{T} = (T_{ijk})$ で示す．

式 (3) で定義された2階のテンソル $\boldsymbol{g}$ を空間の**基本計量テンソル**または単に**基本テンソル**という．このテンソル $\boldsymbol{g}$ は基本ベクトルに対して §1 の (7) により

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$$

であるから，成分 g_{ij} は

$$g_{ij} = \delta_{ij}$$

で与えられ，ベクトル $\boldsymbol{u} = (u_i)$, $\boldsymbol{v} = (v_i)$ に対して

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{i,j=1}^{3} \delta_{ij} u_i v_j$$

である．ここで

$$\sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} v_j = \delta_{i1} v_1 + \delta_{i2} v_2 + \delta_{i3} v_3 = v_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

であることに注意すれば，

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i \tag{14}$$

となり，普通の内積の式に一致する．

ベクトルの線形変換 T を2階のテンソルと見なすことができることを述べたが，この性質の逆および一般化を次のように述べることができる．

定理 2.1 2階のテンソル $\boldsymbol{T}$ が与えられたとき，任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して，$\bar{\boldsymbol{v}}$ を

$$\bar{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \qquad (\boldsymbol{u} \text{ はベクトル変数}) \tag{15}$$

である実数値関数とすれば，$\bar{\boldsymbol{v}}$ はベクトルであり，

$$\bar{\boldsymbol{v}} = T(\boldsymbol{v})$$

で定義される変換 T は線形変換である．

定理 2.2 任意のベクトル $\boldsymbol{w}$ に対して，テンソルを対応させる写像 $\boldsymbol{W} = T(\boldsymbol{w})$ が線形性

$$\begin{cases} T(\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) = T(\boldsymbol{w}_1) + T(\boldsymbol{w}_2) \\ T(k\boldsymbol{w}) = kT(\boldsymbol{w}) \end{cases} \tag{16}$$

を満たすならば，T は $\boldsymbol{W}$ の階数より1階高い階数のテンソルと見なされる．

定理 2.2 はテンソルの**商法則**といわれているものである．

問　　題

1. 定理 2.1 を証明し，$\boldsymbol{T}$ の成分が (T_{ij}) であるとき線形変換の式を求めよ．

2. 定理 2.2 を，$\boldsymbol{W}=T(\boldsymbol{w})$ が2階のテンソルである場合について証明せよ．

[解　　答]

1. ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ に対して，$\overline{\boldsymbol{v}}=T(\boldsymbol{v}), \overline{\boldsymbol{w}}=T(\boldsymbol{w})$ とする．任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して，$\boldsymbol{T}$ の双線形性を用いて

$$\overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u})+\overline{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})+\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$$
$$=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=\overline{(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})}(\boldsymbol{u})$$

および

$$k\overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u})=k\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, k\boldsymbol{v})=(k\overline{\boldsymbol{v}})(\boldsymbol{u})$$

であるから，次の線形性が成り立つ．

$$T(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=T(\boldsymbol{v})+T(\boldsymbol{w}), \qquad T(k\boldsymbol{v})=kT(\boldsymbol{v})$$

$\boldsymbol{u}=(u_i), \boldsymbol{v}=(v_i), \overline{\boldsymbol{v}}=(\bar{v}_i)$ のとき，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})=\sum_{i,j=1}^{3} T_{ij}u_i v_j$ であり，式(10)で $\boldsymbol{u}$ として基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ を選べば，成分による線形変換の式

$$\bar{v}_i=\overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{e}_i)=\sum_{j=1}^{3} T_{ij}v_j \tag{17}$$

を得る．

2. $\boldsymbol{W}$ が2階のテンソルのとき，ベクトル変数 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対して $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ は双線形性をもつ実数値関数である．

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})=\boldsymbol{W}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})=(T(\boldsymbol{w}))(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \tag{18}$$

と定義すれば，$\boldsymbol{T}$ は 3 個のベクトル変数 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ についての実数値関数である．ベクトル変数 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ についての線形性は $\boldsymbol{W}$ の双線形性から，$\boldsymbol{w}$ についての線形性は T の線形性 (16) から導かれる．ゆえに $\boldsymbol{T}$ は3階のテンソルである．

$\boldsymbol{T}$ の成分を (T_{ijk})，$T_{ijk}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k)$，$\boldsymbol{w}=(w_k)=\sum_{k=1}^{3} w_k\boldsymbol{e}_k$，$\boldsymbol{W}=(W_{ij})$ とする．式 (18) を用いて

$$W_{ij}=\boldsymbol{W}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{w})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \sum_{k=1}^{3} w_k\boldsymbol{e}_k)$$
$$=\sum_{k=1}^{3}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k)w_k=\sum_{k=1}^{3} T_{ijk}w_k \tag{19}$$

であり，これが2階のテンソル $\boldsymbol{W}=T(\boldsymbol{w})$ と3階のテンソル $\boldsymbol{T}$ の成分の関係を与えている．

§3. テンソルの和，積

いままで下付きの指標について総和 $\sum_{i=1}^{3}$, $\sum_{j=1}^{3}$ などを含んでいる式がしばしば現われてきた．たとえば，§2 の (6), (7), (8), (13), (14) などの式で，総和をとっている指標はそれぞれの項の中につねに2度現われている．そこで，今

後1つの項に2度繰り返して現われている指標については，つねにその指標の動く範囲である 1, 2, 3 について総和をとるものと約束する．これをアインシュタインの**総和の規約**という．この規約のもとに，§2 の (6), (7), (14), (8), (19) の各式をそれぞれ簡単に

(1) $$\boldsymbol{u} = u_i \boldsymbol{e}_i, \qquad \boldsymbol{v} = v_j \boldsymbol{e}_j$$

(2) $$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = T_{ij} u_i v_j$$

(3) $$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = u_i v_i$$

(4) $$\bar{v}_i = T_{ij} v_j \qquad (i = 1, 2, 3)$$

(5) $$W_{ij} = T_{ijk} w_k \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

と書くことができる．

上の (1) の第1式で2度現われている指標 i を同時に他の指標 k や l におき換えても，$u_k \boldsymbol{e}_k$, $u_l \boldsymbol{e}_l$ はいずれも

$$u_1 \boldsymbol{e}_1 + u_2 \boldsymbol{e}_2 + u_3 \boldsymbol{e}_3$$

を表している．(1), (2), (3) の各式で i または j についても同じことがいえる．したがって総和をとっている指標は同時に他の指標におき換えてもよい．この意味でこのような指標を**黙した指標**または**死んだ指標**ということがある．これに対して，式 (4) で指標 i は $i = 1, 2, 3$ であるような3つの式をまとめて表しており，この指標は1つの等式のうちでは他の指標でおき換えることはできない．このような指標を**生きた指標**ということがある．

式 (2) の右辺で i, j は死んだ指標であり，

$$T_{ij} u_i v_j = T_{ji} u_j v_i$$

と書くことはできるが，

$$T_{ii} u_i v_i$$

と書けばどの指標について加えているかわからなくなってしまい，このような書き方は避けなければならない．

また，特殊な座標系を用いるとき，たとえば式 (4) の右辺は3つの項の和であるが，その第 j 項 $T_{ij} v_j$ を示す必要が起こる場合がある．このとき

$$T_{ij} v_j \qquad (j \text{ について加えない})$$

と書くことにする．しかし，一般論を進める限りではこのようなことはほとん

ど起こらない．

今後しばしば用いられる公式をあげておこう．

(6) $$\delta_{ij}v_j = v_i$$

(7) $$\delta_{ij}u_i v_j = u_i v_i$$

式 (6) の左辺は

$$\delta_{i1}v_1 + \delta_{i2}v_2 + \delta_{i3}v_3$$

であり，i が第2の指標と一致する項だけが v_i であり，その他の項は0であるから式 (6) が成り立つ．そのとき式 (7) はただちに導かれる．

さて，テンソルの和，積などの代数的演算とその代数的性質を調べよう．

p 階のテンソルが，任意の p 個のベクトルに対してつねに値0をとるとき，それを**零テンソル**といい，$\boldsymbol{O}$ で示す．基本ベクトルに対して

$$\boldsymbol{O}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k) = 0$$

であるから，零テンソルの成分はすべて0である．1階の零テンソルは零ベクトル $\boldsymbol{0} = (0, 0, 0)$ であり，2階の零テンソルは零正方行列

$$\boldsymbol{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で表される．

同じ階数の2つのテンソル，たとえば3階のテンソル

$$\boldsymbol{S} = (S_{ijk}), \qquad \boldsymbol{T} = (T_{ijk})$$

について，対応する成分がすべて

$$S_{ijk} = T_{ijk}$$

であるとき，$\boldsymbol{S}$ と $\boldsymbol{T}$ とは**等しい**といい，等号 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}$ で表す．

また，同じ階数のテンソル $\boldsymbol{S}$ と $\boldsymbol{T}$ について，対応する成分の和を成分にもつテンソルを $\boldsymbol{S}$ と $\boldsymbol{T}$ との**和**といい，$\boldsymbol{S} + \boldsymbol{T}$ で表す．すなわち

$$\boldsymbol{S} + \boldsymbol{T} = (S_{ijk} + T_{ijk})$$

である．

任意のテンソル $\boldsymbol{T} = (T_{ijk})$ について，

$$\boldsymbol{kT}=(kT_{ijk})$$

で定義されるテンソルをテンソル $\boldsymbol{T}$ の $\boldsymbol{k}$ **倍**または**スカラー倍**という.

さらに，2つのテンソル（階数が異なってもよい）

$$\boldsymbol{S}=(S_{ij}),\qquad \boldsymbol{T}=(T_{ijk})$$

に対して，すべての成分の相互の積

$$(S_{ij}T_{klm})$$

を成分にもつテンソルを $\boldsymbol{S}$ と $\boldsymbol{T}$ との**テンソル積**といい，記号

$$\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{T}=(S_{ij}T_{klm})$$

で表す．いまの場合，$\boldsymbol{S}$ が2階，$\boldsymbol{T}$ が3階で，そのテンソル積 $\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{T}$ は5階であり，一般に p 階と q 階のテンソルの積は $p+q$ 階のテンソルである.

ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の順序を変えた2つのテンソル積は

$$\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}=(a_ib_j)=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a}=(b_ia_j)=\begin{pmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & b_1a_3 \\ b_2a_1 & b_2a_2 & b_2a_3 \\ b_3a_1 & b_3a_2 & b_3a_3 \end{pmatrix}$$

であり，一般に $\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{T}$ と $\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{S}$ は一致しない．上のテンソル積の定義からほとんど明らかに次の性質がわかる.

定理 3.1　任意のテンソル $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{U}$ に対して

$$(\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{T})\otimes\boldsymbol{U}=\boldsymbol{S}\otimes(\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{U})$$

$$(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T})\otimes\boldsymbol{U}=\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{U}+\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{U}\qquad(\boldsymbol{S}\text{ と }\boldsymbol{T}\text{ は同階})$$

$$\boldsymbol{U}\otimes(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T})=\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{S}+\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{T}\qquad(\quad〃\quad)$$

が成り立つ.

定理 3.2　　$\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a}\iff\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$

［証 明］ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ がともに $\boldsymbol{0}$ ならば明らかに成立するから，$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ で $a_1\neq 0$ の場合を考える.

（⇒）　　$a_ib_j=b_ia_j\qquad(i, j=1, 2, 3)$

$i=1$ として

$$b_j=\left(\frac{b_1}{a_1}\right)a_j \qquad (j=1,2,3)$$

であるから，$k=b_1/a_1$ とおけば $b_j=ka_j$. ゆえに $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$.

（⇐） $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$ ならば $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{a}$ ◊

基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ から作られる9個のテンソル積

$$\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j \qquad (i, j=1,2,3)$$

は2階のテンソルであり，それを表す成分の行列は (i, j) 成分が1でその他の成分はすべて0である．たとえば

$$\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

である． $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ は互いに1次独立であるから， 定理 3.2 により9個の積 $\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$ は互いに異なる．

定理 3.3 （i） 任意の2階のテンソル $\boldsymbol{T}=(T_{ij})$ は9個の $\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$ の1次結合で表される．

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}T_{11}&T_{12}&T_{13}\\T_{21}&T_{22}&T_{23}\\T_{31}&T_{32}&T_{33}\end{pmatrix}=T_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$$

（ii） もし

$$T_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{O} \quad \text{(零テンソル)}$$

ならば，すべての係数 $T_{ij}=0$ である．

この (ii) の性質を9個の $\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$ の **1 次独立性**という．(i) の性質と合わせれば， $\{\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j;\ i, j=1,2,3\}$ が2階のテンソルの集合の中で， ベクトルに対する基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ と同じように，基底を作っていることを表している．(i) は， その基底に関する1次結合の係数が $\boldsymbol{T}$ の成分になっていることを示している．

3階（またはそれ以上）のテンソルについても，基本ベクトルのテンソル積

$$\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k$$

を考えれば，定理 3.3 と類似な定理が成り立つ．

定理 3.4 （i） 27 個のテンソル積 $\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k$ は互いに異なり，任意の3階のテンソルはそれらの1次結合

$$\boldsymbol{T}=(T_{ijk})=T_{ijk}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k$$

で表される．

（ii） もし

$$T_{ijk}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k=\boldsymbol{O}$$

ならば，すべての係数 $T_{ijk}=0$ である．

この定理は，$\{\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k;\ i, j, k=1, 2, 3\}$ が3階のテンソルの集合の中で，基底を作っていることを表している．

問　　題

1. 3階のテンソル $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}$ について，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を任意のベクトル，k をスカラーとするとき，次の関係を証明せよ．

（1） $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{T} \Leftrightarrow \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$

（2） $(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T})(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})+\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$

（3） $(k\boldsymbol{S})(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})=k\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$

これらの性質は基底に無関係な形で述べられており，(1) はテンソルの等しいこと，(2) はテンソルの和，(3) はテンソルのスカラー倍の定義として用いることができる．

2. ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ と任意のベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対して

$$(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{b}(\boldsymbol{v})$$

であることを証明せよ．これも基底に無関係な形で述べられており，2つのベクトルのテンソル積 $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}$ の定義として用いることができる．この考え方は3個またはそれ以上のベクトルのテンソル積，および任意の階数のテンソルのテンソル積に拡張できる．

3. 問題 **2** の性質に基づいて，定理 3.3 を証明せよ．

4. ベクトル $\boldsymbol{a}=(1, -2, 3)$，$\boldsymbol{b}=(-1, 3, 4)$ のとき，次のテンソルを行列で表せ．

（1） $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}$　　（2） $\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a}$

（3） $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a}$　　（4） $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a}$

[解　　答]

1. $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})=S_{ijk}u_iv_jw_k$，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})=T_{ijk}u_iv_jw_k$ であるから，

（1） $S_{ijk}=T_{ijk} \Rightarrow \boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$．逆に $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ の

とき $u=e_i$, $v=e_j$, $w=e_k$ ととれば, $S_{ijk}=T_{ijk}$.

(2) $(S+T)(u, v, w)=(S_{ijk}+T_{ijk})u_iv_jw_k=S_{ijk}u_iv_jw_k+T_{ijk}u_iv_jw_k$
$=S(u, v, w)+T(u, v, w)$

(3) $(kS)(u, v, w)=(kS_{ijk})u_iv_jw_k=k(S_{ijk}u_iv_jw_k)=kS(u, v, w)$

2. $a\otimes b=(a_ib_j)$ であるから, $(a\otimes b)(u, v)=a_ib_ju_iv_j=(a_iu_i)(b_jv_j)=a(u)b(v)$

3. (i) §2, (11) により $e_i(u)=u_i$ である. 問題 **2** により任意のベクトル u, v に対して

$(T_{ij}e_i\otimes e_j)(u, v)=T_{ij}(e_i\otimes e_j)(u, v)=T_{ij}e_i(u)e_j(v)=T_{ij}u_iv_j=T(u, v)$

であるから, $T_{ij}e_i\otimes e_j=T$.

(ii) $T_{ij}e_i\otimes e_j(e_k, e_l)=T_{ij}e_i(e_k)e_j(e_l)=T_{ij}\delta_{ik}\delta_{jl}=T_{kl}=0$

4. (1) $\begin{pmatrix}-1 & 3 & 4\\ 2 & -6 & -8\\ -3 & 9 & 12\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 3 & -6 & 9\\ 4 & -8 & 12\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}-2 & 5 & 1\\ 5 & -12 & 1\\ 1 & 1 & 24\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 7\\ -1 & 0 & -17\\ -7 & 17 & 0\end{pmatrix}$

§4. 対称・交代テンソル

2階以上のテンソル, たとえば3階のテンソル

$$S=(S_{ijk}) \qquad \text{または} \qquad T=(T_{ijk})$$

の成分が, 指標 i, j, k のすべての組について

$$S_{ijk}=S_{jik} \qquad \text{または} \qquad T_{ijk}=-T_{jik}$$

という性質をもつとき, S は指標 i, j について**対称**である, また T は指標 i, j について**交代**であるという.

そのとき S は, 任意のベクトル $u=(u_i)$, $v=(v_i)$, $w=(w_i)$ に対して

$$\begin{aligned}S(u, v, w)&=S_{ijk}u_iv_jw_k\\ &=S_{jik}u_iv_jw_k \qquad \text{(対称性により)}\\ &=S_{jik}v_ju_iw_k=S(v, u, w)\end{aligned}$$

であるから, $S=(S_{ijk})$ が i, j について対称であることと $S(u, v, w)$ が第1と第2のベクトル変数について

$$S(u, v, w)=S(v, u, w)$$

が成り立つことと同値である. 交代のテンソル T についても同様に

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = -\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$$

が成り立つ．

$\boldsymbol{S}=(S_{ijk})$ がすべての指標について対称であるとき，それは単に**対称**であるという．一方，$\boldsymbol{T}=(T_{ijk})$ がすべての指標について交代であるとき，単に**交代**であるという．3階の交代テンソル $\boldsymbol{T}=(T_{ijk})$ について，

$$T_{ijk}=T_{jki}=T_{kij}=-T_{ikj}=-T_{jik}=-T_{kji}$$

が成り立つ．

2階の対称テンソル $\boldsymbol{S}$ は対称行列 (S_{ij}) で，交代テンソル $\boldsymbol{T}$ は交代行列 (T_{ij}) で表される：

$$S_{ij}=S_{ji}, \qquad T_{ij}+T_{ji}=0$$

定理 4.1　2階のテンソル $\boldsymbol{T}$ が対称かつ交代ならば，$\boldsymbol{T}$ は零テンソルである．

[証 明]
$$T_{ij}=T_{ji} \quad \text{かつ} \quad T_{ij}+T_{ji}=0$$
であるから，
$$2T_{ij}=0 \qquad \therefore \quad T_{ij}=0$$
◇

任意の2階のテンソル $\boldsymbol{R}=(R_{ij})$ に対して

$$S_{ij}=\frac{1}{2}(R_{ij}+R_{ji}), \qquad T_{ij}=\frac{1}{2}(R_{ij}-R_{ji})$$

で定義されるテンソル $\boldsymbol{S}=(S_{ij})$, $\boldsymbol{T}=(T_{ij})$ はそれぞれ対称および交代であり，それらの和はもとのテンソル

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T}; \qquad R_{ij}=S_{ij}+T_{ij}$$

になる．

いま，$\boldsymbol{R}$ が他の対称テンソル $\boldsymbol{S}'$ と交代テンソル $\boldsymbol{T}'$ との和

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{S}'+\boldsymbol{T}'$$

で表されたとすれば，これら2通りの表し方を比較して

$$\boldsymbol{S}-\boldsymbol{S}'=\boldsymbol{T}'-\boldsymbol{T}$$

となる．このとき，$\boldsymbol{S}-\boldsymbol{S}'$ は対称，$\boldsymbol{T}'-\boldsymbol{T}$ は交代テンソルであるから，定理 4.1 によりこれらは零テンソルでなければならない．ゆえに

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}', \qquad \boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}'$$

でなければならない．したがって

定理4.2 任意の2階のテンソル $\boldsymbol{R}$ は対称テンソル $\boldsymbol{S}$ と交代テンソル $\boldsymbol{T}$ の和

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T}$$

として表すことができ，この表し方は一意的である．$\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{T}$ をそれぞれテンソル $\boldsymbol{R}$ の**対称部分**および**交代部分**という．

定理4.3 2階のテンソル $\boldsymbol{T}=(T_{ij})$ が任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ に対してつねに

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=T_{ij}u_iu_j=0$$

ならば，$\boldsymbol{T}$ は交代である．

[**証明**] $\boldsymbol{u}$ として $\boldsymbol{e}_i$ をとれば

(1) $\qquad \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_i)=T_{ii}=0 \qquad (i=1,2,3;\ i$ について加えない)

である．次に $\boldsymbol{u}$ として $\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j$ をとれば，(1) に注意して

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j)&=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)+\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_i)\\&=T_{ij}+T_{ji}=0\end{aligned}$$

であり，$\boldsymbol{T}$ は交代である． ◇

2階の交代テンソル $\boldsymbol{T}=(T_{ij})$ の成分のうち，

$$T_{11}=T_{22}=T_{33}=0$$

であり，その他の成分について

$$T_{23}+T_{32}=0,\qquad T_{31}+T_{13}=0,\qquad T_{12}+T_{21}=0$$

であるから，

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}0 & T_{12} & -T_{31}\\ -T_{12} & 0 & T_{23}\\ T_{31} & -T_{23} & 0\end{pmatrix}$$

で表される．

3階の交代テンソル $\boldsymbol{T}=(T_{ijk})$ の成分は，i,j,k のうちに同じ番号があれば0であり，i,j,k が互いに異なる6個については

$$T_{123}=T_{231}=T_{312}=-T_{132}=-T_{213}=-T_{321}$$

という関係がある．したがって，本質的にはただ1個の成分が与えられれば定

まる.

4階の交代テンソルは存在しない.

ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}&=\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a}\\&=(a_ib_j-b_ia_j)\\&=\begin{pmatrix}0 & a_1b_2-b_1a_2 & a_1b_3-b_1a_3\\ a_2b_1-b_2a_1 & 0 & a_2b_3-b_2a_3\\ a_3b_1-b_3a_1 & a_3b_2-b_3a_2 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

で定義される2階のテンソル $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との**交代積**という.

また, 3個のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の交代積 $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}$ が次の式で定義される.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}=&\,\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\\&-\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{c}-\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a}\end{aligned}$$

この成分は

$$\begin{aligned}&a_ib_jc_k+b_ic_ja_k+c_ia_jb_k-a_ic_jb_k-b_ia_jc_k-c_ib_ja_k\\&=\begin{vmatrix}a_i & a_j & a_k\\ b_i & b_j & b_k\\ c_i & c_j & c_k\end{vmatrix}\end{aligned}$$

である.

定理 4.4 2つのベクトルの交代積は次の性質をもっている.

(i) $$(h\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})\wedge\boldsymbol{c}=h\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c}+k\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}$$
$$\boldsymbol{a}\wedge(h\boldsymbol{b}+k\boldsymbol{c})=h\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}+k\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c}$$

(ii) 交代性 $$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a}$$

3個のベクトルの交代積についても同様の性質が成り立つ.

基本ベクトルの交代積は

$$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{O}\quad(2\text{階の零テンソル})$$

$$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3=-\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であり，$\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$ は互いに異なる．これらの交代積を用いて

定理4.5 （i） 任意の2階の交代テンソル $\boldsymbol{T}=(T_{ij})$ は $\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$ の1次結合で表される．すなわち

$$\boldsymbol{T} = \sum_{i<j} T_{ij}\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j = \frac{1}{2} T_{ij}\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j$$

（ii） 交代テンソル $\boldsymbol{T}=(T_{ij})$ について

$$T_{ij}\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{O}$$

ならば，$T_{ij}=0$ である．

この性質 (ii) は3個の交代積 $\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$ が2階のテンソルとして互いに1次独立であることを示し，性質 (i) と合わせてこの3つの交代積が交代テンソルの集合に対して基底の役割を果たしていることを述べている．

［証 明］（i） 定理 3.3 (i) により，$T_{ji} = -T_{ij}$ に注意して

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T} &= T_{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \\
&= \quad T_{12}\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 + T_{13}\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_3 + T_{21}\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1 \\
&\quad + T_{23}\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_3 + T_{31}\boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_1 + T_{32}\boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_2 \\
&= T_{12}(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1) + T_{13}(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_1) + T_{23}(\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_2) \\
&= T_{12}\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 + T_{13}\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 + T_{23}\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \\
&= \sum_{i<j} T_{ij}\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j
\end{aligned}$$

であり，第1の等号が成り立つ．また

$$\begin{aligned}
\sum_{i>j} T_{ij}\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j &= T_{21}\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_1 + T_{31}\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1 + T_{32}\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_2 \\
&= T_{12}\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 + T_{13}\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 + T_{23}\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \\
&= \sum_{i<j} T_{ij}\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j
\end{aligned}$$

であるから

$$T_{ij}e_i\wedge e_j=\sum_{i<j}T_{ij}e_i\wedge e_j+\sum_{i>j}T_{ij}e_i\wedge e_j$$
$$=2\sum_{i<j}T_{ij}e_i\wedge e_j$$

であり，第2の等号が成り立つ．

(ii) 逆に，交代テンソル $\boldsymbol{T}=(T_{ij})$ に対して

$$\frac{1}{2}T_{ij}e_i\wedge e_j=T_{ij}e_i\otimes e_j$$

と表すことができる．これが零テンソルならば，定理 3.3 (ii) により係数 T_{ij} はすべて0でなければならない． ◇

例 4.1 物体内の各点においてすべての方向にある性質が同じであるとき，その物体は**等方性**であるという．方向によって性質が異なるとき**異方性**であるという．

誘電体における電束密度ベクトルを $\boldsymbol{D}=(D_i)$，電場のベクトルを $\boldsymbol{E}=(E_i)$ とする．誘電体が異方性であるとき，

$$D_i=\sigma_{ij}E_j$$

という関係が成り立つ．$\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_{ij})$ は対称であって，ベクトルの線形変換

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{E})$$

になっている．この $\boldsymbol{\sigma}$ を**誘電率テンソル**という．誘電体が等方性のときは，物体内の各点において $\boldsymbol{\sigma}=\varepsilon\boldsymbol{I}$ すなわち $(\sigma_{ij})=\varepsilon(\delta_{ij})$ の形をしており，

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$$

となる．ε は誘電率である．スカラー

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}=\frac{1}{2}E_iD_i=\frac{1}{2}\sigma_{ij}E_iE_j$$

は電場のエネルギー密度といわれる．

誘電体が強さ $\boldsymbol{E}$ の電場の中にあるとき，電気分極 $\boldsymbol{P}=(P_i)$ を生じ，誘電体が異方性のときには

$$P_i=\kappa_{ij}E_j$$

の形で表される．$\boldsymbol{\kappa}=(\kappa_{ij})$ は対称で，ベクトルの線形変換になっており，分極率テンソルと呼ばれる．そのとき電束密度 $\boldsymbol{D}$ は

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$$

で表される．ε_0 は真空中の誘電率である．成分で書けば

$$D_i=\varepsilon_0E_i+P_i=\varepsilon_0E_i+\kappa_{ij}E_j=(\varepsilon_0\delta_{ij}+\kappa_{ij})E_j$$

であるから，この場合の誘電率テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ は

$$\boldsymbol{\sigma}=\varepsilon_0\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\kappa}; \qquad \sigma_{ij}=\varepsilon_0\delta_{ij}+\kappa_{ij}$$

で与えられる．

問　　題

1. 次の行列で表されるテンソル $\boldsymbol{R}$ の対称部分と交代部分を求めよ．

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

2. 3階のテンソル $\boldsymbol{T}=(T_{ijk})$ が i と j については対称，j と k については交代であれば，$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{O}$ であることを証明せよ．

3. 空間において，4階の交代テンソルは存在しないことを証明せよ．

[解　　答]

1. 対称部分 $\begin{pmatrix}1 & \frac{5}{2} & 4\\ \frac{5}{2} & 4 & 4\\ 4 & 4 & -1\end{pmatrix}$, 交代部分 $\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & 0 & 2\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}$

2. $T_{ijk}=-T_{ikj}=-T_{kij}=T_{kji}=T_{jki}=-T_{jik}=-T_{ijk} \qquad \therefore \quad T_{ijk}=0$

3. 4階の交代テンソルを (T_{ijkl}) とする．すべての指標について交代であるから，すべての指標が互いに異なる成分だけが0でない．しかし，i, j, k, l は 1, 2, 3 のいずれかであるから，このような成分は存在しない．ゆえにすべての成分について $T_{ijkl}=0$ であり，零テンソル以外の4階の交代テンソルは存在しない．

§5. 直交基底の変換とテンソルの成分

いままで，テンソルを表す方法として，空間に1つの直交基底 $\Sigma\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ を選んでそれに関する成分を用いてきた．それは，今後も到るところで見るように，テンソルを実数の組で表すことによってテンソルに関する演算を実数の解析的な演算に転化するための有力な手段である．

しかし，ベクトルはもともと座標系には無関係に空間に存在する実在物であり，したがってベクトルの組に実数を対応させる線形性をもつ関数としてテンソルもまた座標系には無関係な実在物と考えられる．

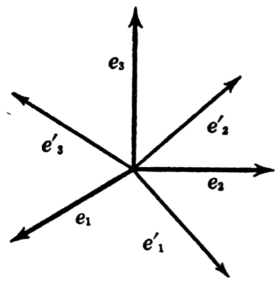
それゆえ，いろいろの直交基底を選んでテンソルを成分で表すとき，一般にその成分は基底ごとに異なる数の組であるから，その間の関係を調べることに

しよう．

空間の２つの直交基底を

$$\Sigma\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\},\qquad \Sigma'\{\boldsymbol{e}'_1,\ \boldsymbol{e}'_2,\ \boldsymbol{e}'_3\}$$

とする．$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ および $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ がそれぞれ直交基底をなすための条件は



1-5 図

（1） $$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}$$

（2） $$\boldsymbol{e}'_i\cdot\boldsymbol{e}'_j=\delta_{ij}$$

である．また，$\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ が基底を作っているから，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ をそれらの１次結合として

（3） $$\begin{cases}\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}'_1a_{11}+\boldsymbol{e}'_2a_{21}+\boldsymbol{e}'_3a_{31}\\ \boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}'_1a_{12}+\boldsymbol{e}'_2a_{22}+\boldsymbol{e}'_3a_{32}\\ \boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}'_1a_{13}+\boldsymbol{e}'_2a_{23}+\boldsymbol{e}'_3a_{33}\end{cases}$$

の形に表すことができる．これを**直交基底の変換**という．ここでは１次結合の係数を右側に書いている．この式は一まとめにして

（4） $$\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{e}'_ia_{ij}$$

と表される．この係数から作られる３次の正方行列を

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

とする．

式 (4) を (1) に代入して (2) を用いれば，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j&=(\boldsymbol{e}'_ka_{ki})\cdot(\boldsymbol{e}'_la_{lj})=(\boldsymbol{e}'_k\cdot\boldsymbol{e}'_l)a_{ki}a_{lj}\\ &=\delta_{kl}a_{ki}a_{lj}=a_{ki}a_{kj}\end{aligned}$$

であるから，

（5） $$a_{ki}a_{kj}=\delta_{ij}$$

である．

逆に Σ' が直交基底であるとき，式 (5) を満たす係数 a_{ij} を用いて式 (3) で与えられるベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ は直交基底を作る．

単位行列を

$$I=(\delta_{ij})=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

で表し，$A=(a_{ij})$ の転置行列を

$${}^tA=(a_{ji})=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}$$

で示せば，(5) は行列を用いて

$$(6)\qquad {}^tAA=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=I$$

と書くことができる．式 (5) すなわち式 (6) を満たすような正方行列 A を**直交行列**という．

以上をまとめて述べれば

定理 5.1 直交基底 $\Sigma'\{\boldsymbol{e}'_1,\ \boldsymbol{e}'_2,\ \boldsymbol{e}'_3\}$ が式 (3) によって直交基底 $\Sigma\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$ に移るための必要十分条件は，その係数行列が直交行列であることである．

正方行列 A の行列式を $|A|$ で示すことにする．一般に

$$|{}^tA|=|A|,\qquad |AB|=|A||B|\qquad (B\text{ も正方行列})$$

が成り立つ．直交行列 A について，式 (6) の両辺の行列式をとれば

$$|{}^tAA|=|{}^tA||A|=|A|^2=|I|=1$$

であるから，

$$(7)\qquad |A|=\pm 1$$

である．ゆえに行列 A は正則であり，式 (6) から A の逆行列 A^{-1} は

$$(8)\qquad A^{-1}={}^tA$$

で与えられる．したがってまた

$$(9)\qquad A\,{}^tA=I;\qquad a_{ik}a_{jk}=\delta_{ij}$$

が成り立つ．式 (4) を $\boldsymbol{e}_k=\boldsymbol{e}'_j a_{jk}$ と書き替え，両辺に a_{ik} を掛けて k について 1 から 3 まで動かした総和をとれば，式 (9) を用いて

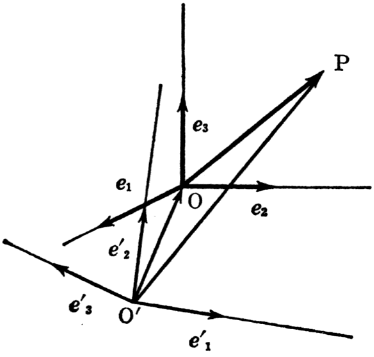
$$\boldsymbol{e}'_j a_{jk} a_{ik} = \boldsymbol{e}_k a_{ik}, \qquad \boldsymbol{e}'_j \delta_{ji} = \boldsymbol{e}_k a_{ik}$$

ゆえに,

(10) $$\boldsymbol{e}'_i = \boldsymbol{e}_k a_{ik} = a_{ik} \boldsymbol{e}_k$$

を得る. これは Σ から Σ' への直交基底の変換である. 総和の指標 k の位置に注意せよ.

2つの直交基底 $\Sigma\{\mathrm{O}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ と $\Sigma'\{\mathrm{O}', \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$ に関する1点 P の座標をそれぞれ (x_1, x_2, x_3) および (x'_1, x'_2, x'_3) とし, 原点 O および O′ に関する位置ベクトルをそれぞれ



1-6 図

(11) $$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x_i \boldsymbol{e}_i$$
$$\overrightarrow{\mathrm{O'P}} = x'_i \boldsymbol{e}'_i$$

とする. また, 点 O の Σ' に関する座標を (b_1, b_2, b_3) とすれば

(12) $$\overrightarrow{\mathrm{O'O}} = b_i \boldsymbol{e}'_i$$

である. そのとき

$$\overrightarrow{\mathrm{O'P}} = \overrightarrow{\mathrm{O'O}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

であり, これに式 (11) と式 (12) を代入し, さらに式 (4) を代入すれば

$$\begin{aligned} x'_i \boldsymbol{e}'_i &= x_j \boldsymbol{e}_j + b_i \boldsymbol{e}'_i = x_j a_{ij} \boldsymbol{e}'_i + b_i \boldsymbol{e}'_i \\ &= (a_{ij} x_j + b_i) \boldsymbol{e}'_i \end{aligned}$$

となる. $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ は基底であるから係数を比較して座標 (x_1, x_2, x_3) と (x'_1, x'_2, x'_3) の間には関係式

(13) $$x'_i = a_{ij} x_j + b_i$$

が成り立つ. これを, 直交基底 Σ から Σ' への変換による点の**座標の変換公式**という. この公式は行列の記号を用いて,

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

の形に書くことができる.

次に，2つの直交基底に関するベクトルの成分の間にどのような関係があるかを見よう．ベクトル $\boldsymbol{v}$ の直交基底 Σ と Σ' に関する成分をそれぞれ (v_i) および (v'_i) とすれば

$$\boldsymbol{v}=v_j\boldsymbol{e}_j=v'_i\boldsymbol{e}'_i$$

である．この式の $\boldsymbol{e}_j$ に式 (4) を代入し，$\boldsymbol{e}'_i$ の係数を比較すれば

(14) $$v'_i=a_{ij}v_j$$

を得る．

任意のベクトル $\boldsymbol{w}$ に対して，$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{w})$ を内積

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{w})=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$$

であると考えれば，それぞれの基底に関する成分は

$$v_i=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_i,\qquad v'_i=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{e}'_i)=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}'_i$$

であるから，後者の等式に式 (10) を代入して線形性を用い，

$$v'_i=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{e}'_i)=\boldsymbol{v}(a_{ij}\boldsymbol{e}_j)=a_{ij}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{e}_j)=a_{ij}v_j$$

として式 (14) を導くこともできる．

2階のテンソル $\boldsymbol{T}$ の基底 Σ と Σ' に関する成分は，それぞれ

$$T_{ij}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j),\qquad T'_{ij}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}'_i,\boldsymbol{e}'_j)$$

で定義された．この後者の式に (10) を代入して各ベクトル変数についての線形性を用いれば

$$\begin{aligned}T'_{ij}&=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}'_i,\boldsymbol{e}'_j)=\boldsymbol{T}(a_{ik}\boldsymbol{e}_k,a_{jl}\boldsymbol{e}_l)\\&=a_{ik}a_{jl}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_l)\end{aligned}$$

ゆえに関係式

(15) $$T'_{ij}=a_{ik}a_{jl}T_{kl}$$

を得る．全く同様にして，3階のテンソル $\boldsymbol{T}$ の Σ と Σ' に関する成分をそれぞれ (T_{ijk}) および (T'_{ijk}) とすれば，関係式

(16) $$T'_{ijk}=a_{il}a_{jm}a_{kn}T_{lmn}$$

を導くことができる．以上をまとめれば

定理 5.2 直交基底の変換 (3) のもとで，ベクトル，2階のテンソル，3階のテンソルのそれぞれの基底に関する成分は関係式 (14), (15) および (16) で結ばれる．一般の p 階のテンソルについても同様の関

係式が成り立つ.

関係式 (14), (15), (16) を直交基底の変換によるベクトルあるいはテンソルの**成分の変換法則**という.

(14) 式の両辺に a_{ik} を掛けて i について総和をとれば

$$a_{ik}v'_i = a_{ik}a_{ij}v_j = \delta_{kj}v_j = v_k$$

$$\therefore \quad v_k = a_{ik}v'_i$$

である. 直交行列 $A=(a_{ij})$ については, $A^{-1}={}^tA$ であるから, この式はちょうど Σ' から Σ への直交基底の変換によるベクトルの成分の変換法則になっている. テンソルの成分についても同様である.

第3章まででは直交テンソルを取り扱うことにしているが, それはテンソルを対比する基底として直交基底だけに限定して考えることに由来する. したがって成分の変換法則の中に入ってくる行列も直交行列だけである. のちに一般の基底を取り扱うようになると成分の変換法則もかなり広くなり, それによってテンソルの性質を区別することが必要になってくる.

問　　題

1. §3 でテンソルの和, 積を, §4 でテンソルの対称性, 交代性を, 1つの直交基底に関する成分について定義したが, この性質は直交基底の変換によって不変であることを示せ.

2. 直交基底の変換式 (4) のとき, $\{\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\}$ と $\{\boldsymbol{e}'_i\otimes\boldsymbol{e}'_j\}$ の変換公式を求め, これを用いて2階のテンソルの成分の変換法則を求めよ.

3. 直交行列 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ について, 逆行列 A^{-1}, 積 AB も直交行列であることを証明せよ.

[解　　答]

1. 2階のテンソルについて証明する. Σ, Σ' に関する $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{T}$ の成分を (S_{ij}), (S'_{kl}), (T_{ij}), (T'_{kl}) とすれば, $S'_{ij}=a_{ik}a_{jl}S_{kl}$, $T'_{ij}=a_{ik}a_{jl}T_{kl}$.

和について　　$(S'_{ij}+T'_{ij})=a_{ik}a_{jl}(S_{kl}+T_{kl})$

対称性　　$S'_{ij}-S'_{ji}=a_{ik}a_{jl}(S_{kl}-S_{lk})=0$

交代性　　$T'_{ij}+T'_{ji}=a_{ik}a_{jl}(T_{kl}+T_{lk})=0$

2. $\boldsymbol{e}_k=\boldsymbol{e}'_ia_{ik}$ ゆえに $\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}_l=\boldsymbol{e}'_i\otimes\boldsymbol{e}'_ja_{ik}a_{jl}$. $\boldsymbol{T}=T_{kl}\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}_l=T'_{ij}\boldsymbol{e}'_i\otimes\boldsymbol{e}'_j$ であるから, 第2式に $\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}_l$ の式を代入し, 定理 3.3 (ii) により $T'_{ij}=a_{ik}a_{jl}T_{kl}$.

3. ${}^t(A^{-1})A^{-1}=({}^tA)^{-1}A^{-1}=(A{}^tA)^{-1}=I$. ゆえに A^{-1} は直交行列. ${}^t(AB)(AB)=$

${}^tB{}^tAAB={}^tBIB={}^tBB=I$, AB も直交行列.

§6. 成分によるテンソルの構成

§4 までの議論では，1つの直交基底 Σ に関して数個の実数の組があれば，その組が1つのテンソルを表すような印象を与えたかも知れない．たとえば3個の数の組はベクトルを，9個の数の組は2階のテンソルを表すかのように．しかし定理 5.2 で述べたように，テンソルの各直交基底に関する成分は一定の変換法則に従っていなければならない．したがって，各基底に関して勝手に与えられた数の組がベクトルやテンソルを構成するものではない．点の座標は各座標系で3個の数の組で表されるが，§5 の式 (13) に従って変換するから，点そのものはベクトルではない．基底の変換に無関係な1個の数はスカラーである．

この節では，逆にそれぞれの直交基底に関して数個の実数の組が与えられ，それらが $\Sigma\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ から $\Sigma'\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$ への直交基底の変換のもとで

(1)　(v_i) と (v'_i) について，　$v'_i=a_{ij}v_j$

(2)　(T_{ij}) と (T'_{ij}) について，　$T'_{ij}=a_{ik}a_{jl}T_{kl}$

(3)　(T_{ijk}) と (T'_{ijk}) について，　$T'_{ijk}=a_{il}a_{jm}a_{kn}T_{lmn}$

などの変換法則に従うとき，それらを成分にもつようなテンソルを構成することを考えよう．ここに，(T_{ij}) などは Σ に関する数の組，(T'_{ij}) などは Σ' に関する数の組とする．

まず変換法則 (1) に従う数の組 (v_i), (v'_i) について，それぞれの基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{e}'_i$ を用いて1次結合

(4)　$$v_i\boldsymbol{e}_i,\qquad v'_i\boldsymbol{e}'_i$$

を考える．直交基底の変換は §5 の式 (4) あるいは (10) のように

(5)　$$\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{e}'_ia_{ij},\qquad \boldsymbol{e}'_i=a_{ij}\boldsymbol{e}_j$$

であるから，(4) の第2式に変換法則 (1) と (5) を代入すれば，直交行列の性質 §5 の式 (9) を用いて

$$\begin{aligned}v'_i\boldsymbol{e}'_i&=(a_{ij}v_j)(a_{ik}\boldsymbol{e}_k)=a_{ij}a_{ik}v_j\boldsymbol{e}_k\\&=\delta_{jk}v_j\boldsymbol{e}_k=v_j\boldsymbol{e}_j\end{aligned}$$

となり，(4) の第1式と一致する．ゆえに式 (4) の2つの式は直交基底の取り方に無関係な同一の量を表すから，それをベクトル

$$\boldsymbol{v}=v_i\boldsymbol{e}_i=v'_i\boldsymbol{e}'_i$$

と定義する．同じ成分の変換法則 (1) に従う数の組 (w_i) と (w'_i) からベクトル $\boldsymbol{w}$ を定義する．そのとき，和およびスカラー倍を

$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=(v_i+w_i)\boldsymbol{e}_i, \qquad k\boldsymbol{v}=kv_i\boldsymbol{e}_i$$

で定義すれば，これらは直交基底の選び方に無関係に定まる．すなわち，上で定義したベクトルの間に和およびスカラー倍を定義することができる．

次に，変換法則 (2) に従う数の組 (T_{ij}) と (T'_{ij}) を考えよう．それぞれの直交基底において基本ベクトルの9組のテンソル積

$$\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j, \qquad \boldsymbol{e}'_i\otimes\boldsymbol{e}'_j \qquad (i, j=1, 2, 3)$$

を作り，それらの1次結合

(6)
$$T_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j, \qquad T'_{ij}\boldsymbol{e}'_i\otimes\boldsymbol{e}'_j$$

を考える．ベクトルの場合と同様に，この第2式に変換法則 (2) と (5) を代入すれば

$$T'_{ij}\boldsymbol{e}'_i\otimes\boldsymbol{e}'_j=a_{ik}a_{jl}T_{kl}\boldsymbol{e}'_i\otimes\boldsymbol{e}'_j=T_{kl}\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}_l$$

となり，(6) の第1式に一致する．ゆえに式 (6) で定義される量は直交基底の取り方に無関係であり，

$$\boldsymbol{T}=T_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j=T'_{ij}\boldsymbol{e}'_i\otimes\boldsymbol{e}'_j$$

とおく．任意のベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ の Σ に関する成分を (u_i), (v_i) とすれば，テンソル積の定義 (§3 問題 2) により

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})&=T_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})=T_{ij}\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{u})\boldsymbol{e}_j(\boldsymbol{v})\\&=T_{ij}u_iv_j\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)=T_{kl}\boldsymbol{e}_k(\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_l(\boldsymbol{e}_j)=T_{kl}\delta_{ki}\delta_{lj}=T_{ij}$$

であり，$\boldsymbol{T}$ は Σ に関して成分 (T_{ij}) をもつ2階のテンソルである．

変換法則 (3) に従う実数の組 (T_{ijk}) と (T'_{ijk}) については，基本ベクトルのテンソル積の1次結合

$$\boldsymbol{T}=T_{ijk}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k=T'_{ijk}\boldsymbol{e}'_i\otimes\boldsymbol{e}'_j\otimes\boldsymbol{e}'_k$$

を作れば，$\boldsymbol{T}$ は3階のテンソルになる．したがって

定理 6.1　それぞれの直交基底 Σ に関して実数の組 (v_i), (T_{ij}), (T_{ijk}) が与えられ，それらの数の組が直交基底の変換 (5) のもとで変換法則 (1), (2), (3) に従うとき，Σ に関してそれらを成分にもつようなベクトル，2階のテンソルまたは3階のテンソルが構成される．さらに一般の p 階のテンソルについても同じことがいえる．

テンソルの古典的な（といってもこの1世紀ほどの間であるが）定義は，この定理で述べられたような変換法則に従う数の組で構成されるものとしている．テンソルをベクトル変数について線形性をもつ写像ないしは関数として把える方法は，座標系などに無関係にその実体を直接的に取り扱い，理論を公理的に構成していく上で優れている．一方，成分によるテンソルの表現方法は，上記とは全く対蹠的に，個々の直交基底に関してテンソルは異なる成分をもつが，変換法則を媒介にしてそれらのすべてに共通の性質を見極めることによって，テンソルの特性を調べようというものであって，成分という実数を取り扱うという意味で解析的に非常に有効な手法であるといえる．

そのようなわけで，テンソルの1つの直交基底に関する成分がわかれば，他の任意の直交基底に関する成分が変換法則によりわかるから，テンソルの成分について述べるとき，普通には1つの直交基底が選ばれているものとして，たとえば3階のテンソル $\boldsymbol{T}$ を単に

$$\boldsymbol{T}=(T_{ijk})$$

の形で表す．また2つの直交基底に関する成分を比較する必要がある場合には，異なる直交基底に関する成分を (T_{ijk}) および (T'_{ijk}) で表し，その間には変換法則 (3) が成り立っているものとする．

次の性質は簡単であるが，テンソルの重要な性質である．

定理 6.2　テンソル $\boldsymbol{T}$ の1つの基底に関する成分がすべて0ならば，他の任意の直交基底に関する成分もすべて0である．すなわち $\boldsymbol{T}$ は零テンソルである．

証明は式 (3) の右辺のすべての T_{lmn} を0とおけばよい．

さて，3階のテンソル $\boldsymbol{T}$ の1つの直交基底に関する成分から

$$T_{ijj} = T_{i11} + T_{i22} + T_{i33}$$

のような和を考える．j は総和の指標であるから，2つの j を同時に他の指標でおき換えても同じである（$T_{ijj} = T_{ikk}$）．他の直交基底に関して同様に定義される和

$$T'_{ijj} = T'_{i11} + T'_{i22} + T'_{i33}$$

を考えれば，これは式 (3) で j と k をともに 1, 2, 3 とした総和であるから

$$T'_{ijj} = a_{il} a_{jm} a_{jn} T_{lmn}$$

となる．直交行列の性質 §5 の (9) により，これは

$$T'_{ijj} = a_{il} \delta_{mn} T_{lmn} = a_{il} T_{lmm}$$

となる．この式はベクトルの成分の変換法則に従っており，定理 6.1 によりそれぞれの直交基底で（T_{ijj}）で表される量は1つのベクトルを構成する．

この演算は p 階（$p \geqq 2$）のテンソルに対しても同様に適用することができ，($p-2$) 階のテンソルが得られる．このようにして階数が2階低いテンソルを作る方法を **縮約** という．たとえば4階のテンソル（T_{ijkl}）に対して

$$T_{ijkk} = T_{ij11} + T_{ij22} + T_{ij33}$$

は2階のテンソルを構成する．この場合，どの指標について縮約したか明示しなければならない．一般に（T_{ijkk}）と（T_{kkij}）とは異なるテンソルである．縮約の結果が2階以上のテンソルならば，生きた指標に関してさらに縮約することができる．たとえば（T_{ijkk}）から（T_{iikk}）を作ることができる．

とくに2階のテンソル $\boldsymbol{T} = (T_{ij})$ を縮約したものはスカラーであり，

$$T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

のように行列 (T_{ij}) の対角成分の和である．これをテンソル $\boldsymbol{T}$ の **トレース** といい $\mathrm{tr}(\boldsymbol{T})$ で表すことがある．

2階のテンソル $\boldsymbol{T} = (T_{ij})$ とベクトル $\boldsymbol{v} = (v_i)$ とのテンソル積

$$\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{v} = (T_{ij} v_k)$$

は3階のテンソルであり，これを j と k について縮約すれば

$$(T_{ij} v_j)$$

は i が生きた指標であって1階のテンソル，すなわちベクトルを構成する．このベクトルを

(7) $$\bar{\boldsymbol{v}}=T(\boldsymbol{v})=(T_{ij}v_j)$$

と表し，テンソル $\boldsymbol{T}$ とベクトル $\boldsymbol{v}$ の**縮合**という.

$T(\boldsymbol{v})$ はベクトル変数 $\boldsymbol{v}$ について線形性

$$T(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)=T(\boldsymbol{v}_1)+T(\boldsymbol{v}_2)$$

をもつから，ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対してベクトル $\bar{\boldsymbol{v}}$ を対応させる変換として，線形変換と見なすことができる.

定理6.3 任意の2階のテンソル $\boldsymbol{T}=(T_{ij})$ に対して式 (7) によってユークリッド空間のベクトルの線形変換 $T(\boldsymbol{v})$ が定義される.

基本テンソル $\boldsymbol{g}=(\delta_{ij})$ と任意のベクトル $\boldsymbol{v}=(v_i)$ の縮合の成分は

$$\delta_{ij}v_j=v_i$$

であり，これはベクトル $\boldsymbol{v}$ 自身になるから，この線形変換は恒等変換

$$I(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}$$

にほかならない.

3階のテンソル $\boldsymbol{T}=(T_{ijk})$ についても，任意のベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を続いて縮合すれば,

$$(T_{ijk}v_jw_k)$$

は i が生きた指標であって，1つのベクトルを構成する．このベクトルをベクトル変数 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ に対してテンソル $\boldsymbol{T}$ によって定まるベクトルとして

$$T(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$$

と表せば，これはそれぞれのベクトル変数について線形性をもつ写像と考えることができる.

2つの2階のテンソル $\boldsymbol{S}=(S_{ij})$, $\boldsymbol{T}=(T_{ij})$ が与える線形変換を

$$S(\boldsymbol{v})=(S_{ij}v_j), \qquad T(\boldsymbol{v})=(T_{ij}v_j)$$

で示すとき，それらの変換としての積 $S(T(\boldsymbol{v}))$ の成分は,

$$S(T(\boldsymbol{v}))=(S_{ij}T_{jk}v_k)$$

で与えられる．積の線形変換には，(S_{ij}) の第2の指標と (T_{ij}) の第1の指標について縮合をした2階のテンソル $(S_{ij}T_{jk})$ が対応している．これを行列で表せば

$$(S_{ij}T_{jk})=\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

と表すことができる.

2階のテンソル $\boldsymbol{T}=(T_{ij})$ に対して，その線形変換 $T(\boldsymbol{v})$ が逆変換をもつとき，すなわち任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して

$$S(T(\boldsymbol{v}))=\boldsymbol{v} \tag{8}$$

であるような線形変換 S が存在するとき，$\boldsymbol{T}$ は**正則**であるという．式 (8) を成分の行列で表せば

$$(S_{ij}T_{jk})=(S_{ij})(T_{jk})=I$$

であるから，行列の性質によって

定理6.4　2階のテンソル $\boldsymbol{T}=(T_{ij})$ が正則であるための必要十分条件は，$\boldsymbol{T}$ の成分の行列式が $|T_{ij}|\neq 0$ であることである.

問　　題

1. (1) 各直交基底に関して (δ_{ij}) で表される量は2階のテンソルであることを，変換法則を用いて証明せよ.

(2) (δ_{ij}) から i と j について縮約して得られる δ_{ii} はスカラーであり，

$$\delta_{ii}=3$$

2. $\boldsymbol{S}=(S_{ij})$ が対称テンソル，$\boldsymbol{T}=(T_{ij})$ が交代テンソルならば，$S_{ij}T_{ij}=0$ であることを証明せよ.

3. テンソル $\boldsymbol{T}=(T_{ij})$ の直交基底に関する成分から作られる行列式 $|T_{ij}|$ はスカラーであることを証明せよ.

4. 各直交基底に関して対称な行列 (T_{ij}) が与えられているとき，任意のベクトル $\boldsymbol{v}=(v_i)$ に対して $T_{ij}v_iv_j$ がスカラーであるという性質をもつならば，(T_{ij}) はテンソルの成分であることを証明せよ.

[解　　答]

1. (1) $a_{ik}a_{jl}\delta_{kl}=a_{ik}a_{jk}=\delta_{ij}$ であり，これは2階のテンソルの成分の変換法則である.

(2) したがって δ_{ii} はスカラーであり，$\delta_{ii}=\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}=3.$

2. $\boldsymbol{S}$ の対称性により $S_{ij}T_{ij}=S_{ji}T_{ij}$，$\boldsymbol{T}$ の交代性により $S_{ji}T_{ij}=-S_{ji}T_{ji}$

$\therefore\quad S_{ij}T_{ij}=0$

3.　$T'_{ij}=a_{ik}a_{jl}T_{kl}.$

$$|T'_{ij}|=|a_{ik}T_{kl}a_{jl}|=|A||T_{kl}||{}^tA|=|A|^2|T_{kl}|$$

直交行列 A について $|A|^2=1$ であるから，$|T'_{ij}|=|T_{kl}|$.

4.　$D_{ij}=T'_{ij}-a_{ik}a_{jl}T_{kl}$ とおく．任意のベクトル $v'_i=a_{ik}v_k$ に対して $T'_{ij}v'_iv'_j=T_{kl}v_kv_l$ であるから

$$\begin{aligned}D_{ij}v'_iv'_j&=T'_{ij}v'_iv'_j-a_{ik}a_{jl}T_{kl}v'_iv'_j\\&=T'_{ij}v'_iv'_j-T_{kl}v_kv_l=0.\end{aligned}$$

ゆえに定理 4.3 と同様に D_{ij} は交代である．一方仮定により D_{ij} は対称であるから，$D_{ij}=0$ でなければならない．ゆえに $T'_{ij}=a_{ik}a_{jl}T_{kl}$ であり，これはテンソルの成分の変換法則である．

§7. 軸性テンソル

直交基底 $\Sigma\{e_1, e_2, e_3\}$ と $\Sigma'\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ の変換

$$(1)\qquad e_j=e'_ia_{ij},\qquad e'_i=a_{ij}e_j$$

の係数の作る行列 $A=(a_{ij})$ は直交行列であり，その行列式の値は

$$|A|=|a_{ij}|=\pm1$$

であった．$|A|=+1$ のとき，Σ と Σ' は**同じ向き**である，また Σ に関して Σ' は**正の向き**であるといい，直交基底の変換 (1) またはその行列 A を**回転**という．$|A|=-1$ のとき，Σ と Σ' は**逆の向き**である，また Σ に関して Σ' は**負の向き**であるという．

いま，各直交基底 Σ において

$$(2)\qquad \varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1 & (i, j, k \text{ が } 1, 2, 3 \text{ の偶順列})\\ -1 & (i, j, k \text{ が } 1, 2, 3 \text{ の奇順列})\\ 0 & (i, j, k \text{ がその他の場合})\end{cases}$$

で定義される量 (ε_{ijk}) を考えよう．(2) を書きくだせば

$$\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1$$

$$\varepsilon_{132}=\varepsilon_{213}=\varepsilon_{321}=-1$$

であり，その他の成分は0である．この ε_{ijk} を**エディントンのイプシロン**という．

3個のベクトル $u=(u_i)$, $v=(v_i)$, $w=(w_i)$ に対して，ベクトルの3重

積は

$$|\boldsymbol{u}\ \ \boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{w}|=\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}=\varepsilon_{ijk}u_iv_jw_k$$

であり，各ベクトル変数について線形性をもっているから，ε_{ijk} は3重積を表す3階のテンソルの成分であると考えられる．

ところが，

$$a_{1l}a_{2m}a_{3n}\varepsilon_{lmn}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=|A|$$

であり，最左辺の式で 1, 2, 3 をいろいろ入れ換えることは，中央の辺の行列式で行を入れ換えることであるから，その順列と ε_{ijk} の定義を比較すれば，関係式

（3）
$$a_{il}a_{jm}a_{kn}\varepsilon_{lmn}=|A|\varepsilon_{ijk}$$

が成り立つことがわかる．

行列式 $|A|=\pm1$ であるから，直交基底の変換 (1) を行うとき，ε_{ijk} は普通の3階のテンソルの成分の変換法則のほかに，Σ と Σ' が互いに同じ向きであるか逆の向きであるかに従って $+1$ か -1 が掛かっている．一般に，直交基底の変換 (1) のもとで，このような成分の変換法則に従う量を**軸性量**または**擬**という接頭語を付して呼ぶ．エディントンの $\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_{ijk})$ は3階の軸性テンソルである．これに対して，普通のスカラー，ベクトル，テンソルを**極性量**と総称する．

式 (3) で $|A|$ を ±1 でおき換え，a_{il} などを次々に縮合すれば，

（4）
$$\begin{aligned} a_{jm}a_{kn}\varepsilon_{lmn}&=\pm a_{il}\varepsilon_{ijk} \\ a_{kn}\varepsilon_{lmn}&=\pm a_{il}a_{jm}\varepsilon_{ijk} \\ \varepsilon_{lmn}&=\pm a_{il}a_{jm}a_{kn}\varepsilon_{ijk} \end{aligned}$$

が成り立つ．

たとえば，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が極性ベクトルであるとき，Σ' における3重積は

$$|\boldsymbol{u}' \quad \boldsymbol{v}' \quad \boldsymbol{w}'| = \varepsilon_{ijk}u'_i v'_j w'_k$$
$$= \varepsilon_{ijk}a_{il}a_{jm}a_{kn}u_l v_m w_n$$
$$= \pm\, \varepsilon_{lmn}u_l v_m w_n = \pm |\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{v} \quad \boldsymbol{w}|$$

である．したがって，3重積は軸性スカラーであり，右手系か左手系か，用いる基底の取り方によって符号が異なる．

極性のベクトル $\boldsymbol{v}=(v_i)$ あるいは2階の交代テンソル $\boldsymbol{W}=(W_{ij})$ に対して，$\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_{ijk})$ と縮合して

(5) $$\boldsymbol{V}=(V_{jk}); \qquad V_{jk}=\varepsilon_{ijk}v_i$$

(6) $$\boldsymbol{w}=(w_i); \qquad w_i=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}W_{jk}$$

で定義される $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{w}$ はそれぞれ軸性の2階交代テンソルおよび軸性ベクトルであることがわかる．この $\boldsymbol{V}$ および $\boldsymbol{w}$ は成分

$$\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix} 0 & v_3 & -v_2 \\ -v_3 & 0 & v_1 \\ v_2 & -v_1 & 0 \end{pmatrix}$$

および

$$\boldsymbol{w}=(W_{23},\ W_{31},\ W_{12})$$

をもち，それぞれベクトル $\boldsymbol{v}$ またはテンソル $\boldsymbol{W}$ に**付随する**テンソルまたはベクトルという．

テンソル積，縮合などの演算による極性量と軸性量の関係は一般に

$$\text{極性量} \otimes \text{極性量} \quad \to \quad \text{極性量}$$
$$\text{極性量} \otimes \text{軸性量} \quad \to \quad \text{軸性量}$$
$$\text{軸性量} \otimes \text{軸性量} \quad \to \quad \text{極性量}$$

である．

エディントンの ε_{ijk} についての次の公式は今後しばしば用いられる．

定理 7.1 (i) $$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$$

(ii) $$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk}=2\delta_{il}$$

(iii) $$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=6$$

［証 明］ (i) i と j が同じ番号の場合，$\varepsilon_{iik}=0$ (i について加えない) であるか

ら左辺は0である．右辺は

$$\delta_{ll}\delta_{im}-\delta_{im}\delta_{il}=0 \qquad (i \text{ について加えない})$$

である．ゆえに両辺とも0になって等しい．

i と j が異なる番号，たとえば $i=1, j=2$ の場合，左辺は

$$\varepsilon_{12k}\varepsilon_{lmk}=\varepsilon_{123}\varepsilon_{lm3}=\varepsilon_{lm3}=\begin{cases} 1 & (l=1,\ m=2) \\ -1 & (l=2,\ m=1) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

一方，右辺は $\delta_{1l}\delta_{2m}-\delta_{1m}\delta_{2l}$ であり，l, m の番号の取り方によって，上と同じ値をとる．i, j がその他の番号の場合にも同様にして，(i) の等式が成り立つ．

(ii) (i) 式で j と m について縮約すれば

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk}=\delta_{il}\delta_{jj}-\delta_{ij}\delta_{jl}=3\delta_{il}-\delta_{il}=2\delta_{il}$$

(iii) さらに (ii) 式で i と l について縮約すれば

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=2\delta_{ii}=2\cdot 3=6$$ ◇

この公式を用いれば，先の付随する量のさらに付随する量はもとの量に戻る．詳しくいえば

定理 7.2 $\boldsymbol{v}=(v_i)$ に付随するテンソル $\boldsymbol{V}=(V_{jk})$ の付随ベクトルは $\boldsymbol{v}$ 自身である．

$\boldsymbol{W}=(W_{jk})$ に付随するベクトル $\boldsymbol{w}=(w_i)$ の付随テンソルは $\boldsymbol{W}$ 自身である．

［証 明］ $\boldsymbol{V}$ の付随ベクトルは

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}V_{jk}=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk}v_l=\delta_{il}v_l=v_i$$

$\boldsymbol{w}$ の付随テンソルは

$$\varepsilon_{ijk}w_i=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}W_{lm}=\frac{1}{2}(\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl})W_{lm}$$

$$=\frac{1}{2}(W_{jk}-W_{kj})=W_{jk}$$ ◇

定理 7.3 ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の交代積 $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ に付随するベクトルはベクトル積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ である．

［証 明］

$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=(a_jb_k-b_ja_k)$$

であるから，付随するベクトルの成分は

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(a_jb_k-b_ja_k)=\frac{1}{2}(\varepsilon_{ijk}a_jb_k-\varepsilon_{ikj}b_ka_j)=\varepsilon_{ijk}a_jb_k$$

である．$i=1,2,3$ とすれば

$$(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

となり，ベクトル積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の成分と一致する． ◇

この結果から，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が極性ベクトルであるとき，交代積

$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a}$$

は極性テンソルであり，ベクトル積は

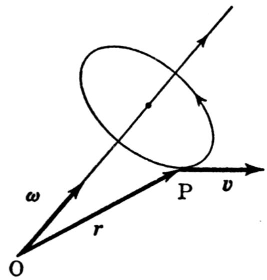
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(\varepsilon_{ijk}a_jb_k)\boldsymbol{e}_i$$

と表され，軸性ベクトルである．

例 7.1 角速度 質点 P がある軸のまわりを回転しているとき，回転角の時間に対する変化率を**角速度**といい，ω とする．回転する向きが右ねじになるような軸の向きで，大きさが ω であるようなベクトル $\boldsymbol{\omega}=(\omega_i)$ を**角速度ベクトル**という．1 点 O に関する点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=(x_i)$ とするとき，P の速度ベクトルはベクトル積

(7) $\qquad \boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\,; \qquad v_i=\varepsilon_{ijk}\omega_jx_k$

で与えられる．



1-7 図

いま $\boldsymbol{\omega}$ に付随するテンソルを $\boldsymbol{\Omega}=(\Omega_{ij})$ とすれば，

$$\boldsymbol{\Omega}=(\varepsilon_{ijk}\omega_k)=\begin{pmatrix}0 & \omega_3 & -\omega_2\\ -\omega_3 & 0 & \omega_1\\ \omega_2 & -\omega_1 & 0\end{pmatrix}$$

であり，式 (7) は線形変換

(8) $\qquad v_i=-\Omega_{ij}x_j \qquad$ すなわち $\qquad \boldsymbol{v}=-\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{r})$

の形で表される．この交代テンソル $\boldsymbol{\Omega}$ を**角速度テンソル**という．

例 7.2 慣性テンソル 剛体が 1 点 O のまわりを回転しているとき，角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega}$，それに対する角速度テンソルを $\boldsymbol{\Omega}$ とする．点 P の質量を m，点 O に関する位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とするとき，点 P の**角運動量ベクトル** $\boldsymbol{h}(\mathrm{P})$ は

(9) $\qquad \boldsymbol{h}(\mathrm{P})=m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}=m\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$

で定義される．§1 の公式 (12)（次の問題 **1** (2) 参照）により

$$\boldsymbol{h}(\mathrm{P})=m\{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}\}$$

が成り立つ．$\boldsymbol{h}(\mathrm{P})$ の成分 (h_i) は

(10)
$$\begin{aligned} h_i &= m\{(x_k x_k)\omega_i - (x_j\omega_j)x_i\} \\ &= m\{(x_k x_k)\delta_{ij} - x_i x_j\}\omega_j \end{aligned}$$

と表される．

(11)
$$J_{ij}(\mathrm{P}) = m\{(x_k x_k)\delta_{ij} - x_i x_j\}$$

すなわち

$$\boldsymbol{J}(\mathrm{P}) = m(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{I} - \boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{r}$$

とおけば，式 (10) を線形変換

$$\boldsymbol{h}(\mathrm{P}) = \boldsymbol{J}(\mathrm{P})(\boldsymbol{\omega})$$

の形に書くことができる．$\boldsymbol{J}(\mathrm{P})$ は質点の質量と位置にのみ関係し，角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ が与えられたとき，その質点の角運動量 $\boldsymbol{h}(\mathrm{P})$ を与える対称なテンソルであって，**慣性テンソル**といわれる．

ところで，式 (7) および (9) から，角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$，角運動量ベクトル $\boldsymbol{h}$ は軸性ベクトルと考えられるから，それらに付随する極性テンソルで表してみよう．

$$H_{jk} = \varepsilon_{ijk} h_i$$

とおき，$\boldsymbol{H} = (H_{jk})$ を**角運動量テンソル**という．式 (9) から

$$\begin{aligned} H_{jk} &= m\varepsilon_{ijk}(\varepsilon_{ilm} x_l v_m) \\ &= m(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) x_l v_m \\ &= m(x_j v_k - x_k v_j) \end{aligned}$$

である．これに式 (8) を代入すれば

(12)
$$H_{jk} = m(\Omega_{jl} x_l x_k - \Omega_{kl} x_l x_j)$$

を得る．これらの式はテンソル記号を用いて

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} &= m(\boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{r}) \\ &= m\{\Omega(\boldsymbol{r})\otimes\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}\otimes\Omega(\boldsymbol{r})\} \end{aligned}$$

と表すことができる．

さらに

(13)
$$J_{jklm} = m(\delta_{jl} x_k x_m - \delta_{kl} x_j x_m)$$

と定義すれば，式 (12) を

$$H_{jk} = J_{jklm}\Omega_{lm}$$

と書くことができる．式 (13) で定義された (J_{jklm}) は **4 階の慣性テンソル**と呼ばれている．

問　題

1. 次の公式を，エディントンのイプシロンを用いて証明せよ．

(1) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$

(2) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$

(3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$

(4) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{d}|\boldsymbol{c}-|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|\boldsymbol{d}$

(5) $|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|^2$

2. 慣性テンソル $\boldsymbol{J}=(J_{ij})$ の成分を，質点 P の座標 (x_1, x_2, x_3) で書き表せ．

3. 2階と4階の慣性テンソル J_{ij}, J_{ijkl} について，次の式を証明せよ．

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{hlm}J_{jklm}=2J_{ih}$$

[解　答]

1. (1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_i=\varepsilon_{ijk}a_jb_k$ であるから，

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2&=(\varepsilon_{ijk}a_jb_k)(\varepsilon_{ilm}a_lb_m)=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}a_jb_ka_lb_m\\&=(\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl})a_jb_ka_lb_m=a_ja_jb_kb_k-a_jb_ja_lb_l\\&=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}a_j(\varepsilon_{klm}b_lc_m)&=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}a_jb_lc_m\\&=(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})a_jb_lc_m=(a_jc_j)b_i-(a_jb_j)c_i\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}(\varepsilon_{ijk}a_jb_k)(\varepsilon_{ilm}c_ld_m)&=(\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl})a_jb_kc_ld_m\\&=(a_jc_j)(b_kd_k)-(a_jd_j)(b_kc_k)\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}(\varepsilon_{jlm}a_lb_m)(\varepsilon_{kpq}c_pd_q)&=(\varepsilon_{jlm}a_lb_m)(\delta_{ip}\delta_{jq}-\delta_{iq}\delta_{jp})c_pd_q\\&=(\varepsilon_{jlm}a_lb_m)(c_id_j-c_jd_i)\\&=|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{d}|c_i-|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|d_i\end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned}&\varepsilon_{ijk}(\varepsilon_{ilm}b_lc_m)(\varepsilon_{jnp}c_na_p)(\varepsilon_{kqr}a_qb_r)\\&=(\varepsilon_{ilm}b_lc_m)(\varepsilon_{jnp}c_na_p)(\delta_{iq}\delta_{jr}-\delta_{ir}\delta_{jq})a_qb_r\\&=(\varepsilon_{ilm}a_ib_lc_m)^2-(\varepsilon_{ilm}b_ib_lc_m)(\varepsilon_{jnp}a_jc_na_p)=|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|^2\end{aligned}$$

2.
$$J_{11}=m(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2-x_1x_1)=m(x_2{}^2+x_3{}^2)$$

同様に
$$J_{22}=m(x_3{}^2+x_1{}^2),\qquad J_{33}=m(x_1{}^2+x_2{}^2),$$
$$J_{23}=J_{32}=-mx_2x_3$$

同様に
$$J_{31}=J_{13}=-mx_3x_1,\qquad J_{12}=J_{21}=-mx_1x_2$$

J_{11}, J_{22}, J_{33} はそれぞれ x_1, x_2, x_3 軸のまわりの慣性モーメントであり，$-J_{23}$, $-J_{31}$, $-J_{12}$ は x_2x_3 平面，x_3x_1 平面，x_1x_2 平面に関する慣性乗積である．

3.
$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{hlm}J_{jklm}&=m\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{hlm}(\delta_{jl}x_kx_m-\delta_{kl}x_jx_m)\\&=m(\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{hjm}x_kx_m-\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{hkm}x_jx_m)\\&=2m\varepsilon_{ikj}\varepsilon_{hmj}x_kx_m=2m(\delta_{ih}\delta_{km}-\delta_{im}\delta_{kh})x_kx_m\\&=2m(\delta_{ih}x_kx_k-x_ix_h)=2J_{ih}\end{aligned}$$

§8. 相反系

3個のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して，それらの成分から作られた行列を

$$D=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

と書くことにする．その行列式 $|D|$ は3重積

$$|D|=|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

である．この行列式の各成分の余因子を対応する大文字で示すことにすれば，たとえば

$$A_1=b_2c_3-b_3c_2, \qquad A_2=b_3c_1-b_1c_3, \qquad A_3=b_1c_2-b_2c_1$$

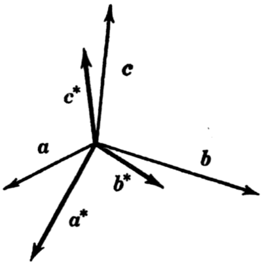
であり，これらはベクトル積 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ の成分である．その他の列の余因子も同様であり，まとめて書けば

(1)　　$A_i=\varepsilon_{ijk}b_jc_k, \qquad B_i=\varepsilon_{ijk}c_ja_k, \qquad C_i=\varepsilon_{ijk}a_jb_k$

と表される．これらを成分にもつベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ と書けば

(2)　　$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}, \qquad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}, \qquad \boldsymbol{C}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

である．



1-8 図

ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して

(3)　$$\begin{cases} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}^*=1, & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^*=0, & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}^*=0 \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}^*=0, & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}^*=1, & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}^*=0 \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}^*=0, & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}^*=0, & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}^*=1 \end{cases}$$

を満足するベクトル $\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{c}^*$ が存在するとき，$\{\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{c}^*\}$ をベクトル系 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ の**相反ベクトル系**あるいは単に**相反系**という．相反系のベクトルの成分から作られる行列を

$$D^*=\begin{pmatrix} a^*_1 & b^*_1 & c^*_1 \\ a^*_2 & b^*_2 & c^*_2 \\ a^*_3 & b^*_3 & c^*_3 \end{pmatrix}$$

と書く. 定義の式 (3) は

$$(4)\qquad {}^tDD^* = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^*_1 & b^*_1 & c^*_1 \\ a^*_2 & b^*_2 & c^*_2 \\ a^*_3 & b^*_3 & c^*_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

であるから, 行列 D は正則であり, その逆行列は

$$D^{-1} = {}^tD^*$$

である.

行列 D が正則, すなわち $|D| \neq 0$ であるとき, D の逆行列は各成分の余因子で作られる行列の転置行列を $|D|$ で割ったものに等しい. すなわち

$$D^{-1} = \frac{1}{|D|} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}$$

であるから,

$$(5)\qquad a^*_i = \frac{A_i}{|D|}, \qquad b^*_j = \frac{B_j}{|D|}, \qquad c^*_k = \frac{C_k}{|D|}$$

である. ゆえに

定理 8.1 ベクトルの系 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ に対して相反系 $\{\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{c}^*\}$ が存在するための必要十分条件は, 行列 D が正則, すなわち $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が1次独立であることである. そのとき, 相反系のベクトルは

$$(6)\qquad \begin{gathered} \boldsymbol{a}^* = \frac{\boldsymbol{A}}{|D|} = \frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|}, \qquad \boldsymbol{b}^* = \frac{\boldsymbol{B}}{|D|} = \frac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|} \\ \boldsymbol{c}^* = \frac{\boldsymbol{C}}{|D|} = \frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|} \end{gathered}$$

で与えられる.

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が極性ベクトルであるとき, (6) の各式は軸性ベクトルを軸性スカラーで割っているから, 相反系のベクトル $\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{c}^*$ も極性ベクトルである.

式 (4) から

$$(7)\qquad |D^*||D| = |\boldsymbol{a}^*\ \ \boldsymbol{b}^*\ \ \boldsymbol{c}^*||\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}| = 1$$

である.

式 (3) は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{c}^*$ について対称的になっているから,

定理 8.2　$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ の相反系が $\{\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{c}^*\}$ ならば，$\{\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{c}^*\}$ の相反系は $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ である．

この性質を相反系の **双対性** という．したがって，

$$\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{b}^*\times\boldsymbol{c}^*}{|D^*|},\qquad \boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{c}^*\times\boldsymbol{a}^*}{|D^*|},\qquad \boldsymbol{c}=\frac{\boldsymbol{a}^*\times\boldsymbol{b}^*}{|D^*|} \tag{8}$$

である．

相反系のベクトル，たとえば $\boldsymbol{a}^*$ は $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の作る平行四辺形に垂直であり，その長さは $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の高さの逆数である．もし $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が互いに垂直ならば

$$\boldsymbol{a}^*=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|},\qquad \boldsymbol{b}^*=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|},\qquad \boldsymbol{c}^*=\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|} \tag{9}$$

である．$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ が直交基底ならば，その相反系は $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ 自身である．

いま，2階のテンソル $\boldsymbol{I}$ を

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{a}^*+\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{b}^*+\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{c}^* \tag{10}$$

すなわち

$$I_{ij}=a_i a^*_j+b_i b^*_j+c_i c^*_j$$

で定義しよう．$\Sigma\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ は1つの基底を作るから，任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ がその基底に関して

$$\boldsymbol{v}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c} \tag{11}$$

と表されたとすれば，相反系の定義式 (3) により

$$\begin{gathered}\boldsymbol{a}^*\cdot\boldsymbol{v}=a^*_j v_j=\alpha,\qquad \boldsymbol{b}^*\cdot\boldsymbol{v}=b^*_j v_j=\beta\\ \boldsymbol{c}^*\cdot\boldsymbol{v}=c^*_j v_j=\gamma\end{gathered} \tag{12}$$

である．

$$\begin{aligned}I_{ij}v_j&=(a_i a^*_j+b_i b^*_j+c_i c^*_j)v_j\\ &=\alpha a_i+\beta b_i+\gamma c_i\\ &=v_i\end{aligned}$$

ゆえにテンソル $\boldsymbol{I}$ によって与えられる線形変換 I は

$$I(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}$$

すなわち

定理 8.3 式 (10) で定義されるテンソル $\boldsymbol{I}$ は単位テンソルである.

$$(13) \qquad a_i a^*_j + b_i b^*_j + c_i c^*_j = \delta_{ij}$$

問　題

1. 式 (6) から直接の計算により式 (8) を導け.

2. $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ と $\{\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{c}^*\}$ が互いに相反系ならば

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}^* + \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}^* + \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c}^* = \boldsymbol{0}$$

であることを証明せよ.

3. $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ と $\{\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{c}^*\}$ が互いに相反系ならば, $\{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\}$ と $\{\boldsymbol{b}^*\times\boldsymbol{c}^*, \boldsymbol{c}^*\times\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{a}^*\times\boldsymbol{b}^*\}$ が互いに相反系であることを証明せよ.

4. ベクトル $\boldsymbol{v}$ が $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ に関して1次結合 (11) で表されているとき, α, β, γ は

$$\alpha = \frac{|\boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|}{|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|}, \qquad \beta = \frac{|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{c}|}{|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|}, \qquad \gamma = \frac{|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|}$$

で与えられることを証明せよ. これは, 式 (9) を α, β, γ についての連立1次方程式と考えた場合の, クラーメルの公式にほかならない.

[解　答]

1. §7 問題 I (4) の式を用いて,

$$\boldsymbol{b}^*\times\boldsymbol{c}^* = \frac{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|^2} = \frac{|\boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}|\boldsymbol{a} - |\boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|^2} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|}$$

式 (7) を用いて

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{b}^*\times\boldsymbol{c}^*}{|\boldsymbol{a}^*\ \ \boldsymbol{b}^*\ \ \boldsymbol{c}^*|}$$

2. 式 (6) と §7 問題 I (2) の式により,

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}^* = \frac{1}{|D|}(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})) = \frac{1}{|D|}\{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}\}.$$

$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c}^*$ も同様に計算して加えればよい.

3. 問題 I の解答と §7 問題 I (5) の式により

$$\boldsymbol{b}^*\times\boldsymbol{c}^* = \frac{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}$$

4. 式 (12) により

$$\alpha = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}^* = \frac{\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}{|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|} = \frac{|\boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|}{|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|}$$

同様にして

$$\beta = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{b}^* = \frac{\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|} = \frac{|\boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|} = \frac{|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{c}|}{|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|}$$

γ についても同じ.

§9. ダイアディクについて

先に，2階のテンソル $\boldsymbol{T}=(T_{ij})$ はベクトルの線形変換

$$(T_{ij}v_j) \qquad \text{および} \qquad (T_{ij}v_i)$$

を定義することを見た．いま，これらの線形変換をそれぞれ

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{T}$$

で表すことにする．物理学で線形変換をベクトルを使って表現する方法としてダイアディクという考えが用いられているが，ここでテンソル代数の立場からダイアディクが何であるかを述べておこう．

ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とのテンソル積

$$\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}=(a_ib_j)$$

は2階のテンソルであるから，線形変換を表すものと考えたとき，それを**ダイアッド**という．任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ への左からの作用と右からの作用は

$$(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{v}=(a_ib_jv_j)=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})=(v_ia_ib_j)=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$$

と表される．

数個のテンソル積の和を**ダイアディク**と呼んでいる．

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{a}_1\otimes\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_2\otimes\boldsymbol{b}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_r\otimes\boldsymbol{b}_r$$

は2階のテンソルであり，線形変換としては

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{a}_1+(\boldsymbol{b}_2\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{a}_2+\cdots+(\boldsymbol{b}_r\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{a}_r$$

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{b}_1+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{b}_2+\cdots+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}_r)\boldsymbol{b}_r$$

と作用する．

2階のテンソル $\boldsymbol{T}=(T_{ij})$ が与えられたとき，

$$\boldsymbol{a}_j=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e}_j=(T_{1j},\ T_{2j},\ T_{3j})$$

および

$$\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{T}=(T_{i1},\ T_{i2},\ T_{i3})$$

とおけば，

$$\boldsymbol{a}_j=T_{ij}\boldsymbol{e}_i, \qquad \boldsymbol{b}_i=T_{ij}\boldsymbol{e}_j$$

であり，

$$(1) \qquad \boldsymbol{T}=T_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{a}_1\otimes\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{a}_2\otimes\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{a}_3\otimes\boldsymbol{e}_3$$

あるいは

$$(2)\qquad \boldsymbol{T}=\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{e}_3\otimes\boldsymbol{b}_3$$

の形に表すことができる．ゆえに

定理 9.1 任意の 2 階のテンソルは多くとも 3 個のダイアッドの和 (1) または (2) の形に表される．とくに単位テンソル $\boldsymbol{I}=(\delta_{ij})$ は

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3\otimes\boldsymbol{e}_3$$

と表される．

すでに述べてきたように，線形変換は2階のテンソルであって，テンソルは普通その成分で表現されるが，成分は座標系ごとに与えられ一定の変換法則に従うものであった．

物理学でダイアディクの概念が用いられた理由は，線形変換を座標系に無関係なベクトルを用いて表現するためであった．しかし，その表し方は一意的ではないし，そのためにダイアッドあるいはダイアディクについて性質や公式を導くことが必要になり，かなり繁雑になる．やはり，線形変換を 2 階のテンソルとして把握し，テンソルの理論の中で理解する方が優れていると思われる．

以下，実の正方行列の固有値問題に関する結果を，説明を加えながら，適宜利用することにする．

線形変換，すなわち2階のテンソル $\boldsymbol{T}=(T_{ij})$ に対して

$$(3)\qquad \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u};\qquad T_{ij}u_j=\lambda u_i$$

であるようなベクトル $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$ が存在するならば，$\boldsymbol{u}$ の示す方向は線形変換 $\boldsymbol{T}$ によって不変である．方程式 (3) は

$$(\boldsymbol{T}-\lambda\boldsymbol{I})\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0};\qquad (T_{ij}-\lambda\delta_{ij})u_j=0$$

$$(4)\qquad \begin{cases}(T_{11}-\lambda)u_1+T_{12}u_2+T_{13}u_3=0\\ T_{21}u_1+(T_{22}-\lambda)u_2+T_{23}u_3=0\\ T_{31}u_1+T_{32}u_2+(T_{33}-\lambda)u_3=0\end{cases}$$

となるから，これが解 $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$ をもつための必要十分条件は

$$(5)\qquad |\boldsymbol{T}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13}\\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23}\\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda\end{vmatrix}=0$$

が成り立つことである．これは λ について3次方程式であり，重複するときはその度数を考えて3個の解 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ をもつ．方程式 (5) をテンソル $\boldsymbol{T}$ の**固有方程式**または**特性方程式**といい，その解 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を**固有値**または**特性値**という．それぞれの固有値 λ_i を方程式 (4) の λ に代入して得られる解ベクトル

$$\boldsymbol{a}_i = (a_{i1},\ a_{i2},\ a_{i3})$$

を固有値 λ_i に属する**固有ベクトル**という．固有値が実数ならば実の固有ベクトルが存在するが，虚数の固有値に属する固有ベクトルは必ず虚数の成分をもっている．

直交基底の変換

$$\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}'_i a_{ij}, \qquad \boldsymbol{e}'_i = a_{ij}\boldsymbol{e}_j$$

のもとで，$\boldsymbol{T}$ の成分の変換法則は

$$T'_{ij} = a_{ik}a_{jl}T_{kl}$$

行列の形で表せば

$$(T'_{ij}) = A(T_{kl})^tA$$

$$\therefore \quad (T'_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = A(T_{ij} - \lambda\delta_{ij})^tA$$

であるから，Σ' における $\boldsymbol{T}$ の固有方程式は

$$|T'_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = |T_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = 0$$

となり，Σ における固有方程式と同じである．したがって $\boldsymbol{T}$ の固有値および固有ベクトルは直交基底の選び方に関係しない．

$\boldsymbol{S} = (S_{ij})$ が対称テンソルであるとき，固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ はすべて実数であり，それらが互いに異なる場合には属する固有ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は互いに垂直である．$\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ の場合は λ_1 に属する2つの固有ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ を互いに垂直であるように選ぶことができ，それらは λ_3 に属する固有ベクトル $\boldsymbol{a}_3$ に垂直である．$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ の場合は，3個の固有ベクトルの方向は定まらないが $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を互いに垂直に選ぶことができることが知られている．

$\boldsymbol{S}$ の3個の固有ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を単位ベクトルに選ぶとき，

$$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{a}_i = \lambda_i\boldsymbol{a}_i; \qquad S_{jk}a_{ik} = \lambda_i a_{ij} \quad (i \text{ について加えない})$$

$$\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j = \delta_{ij}$$

が成り立つ．Σ' の基本ベクトルが

$$\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{a}_1, \qquad \boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{a}_2, \qquad \boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{a}_3$$

であるように選べば，直交基底の変換は

$$\boldsymbol{e}'_i = a_{ij}\boldsymbol{e}_j; \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

である．そのとき，Σ' に関する $\boldsymbol{S}$ の成分は

$$S'_{ij} = a_{ik}a_{jl}S_{kl} = \lambda_i a_{il}a_{jl} = \lambda_i \delta_{ij} \qquad (i \text{ について加えない})$$

であるから，$\boldsymbol{S}$ は対角行列

$$\boldsymbol{S} = (S'_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

で表される．これは，対称テンソル $\boldsymbol{S}$ が

$$\boldsymbol{S} = \lambda_1 \boldsymbol{e}'_1 \otimes \boldsymbol{e}'_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}'_2 \otimes \boldsymbol{e}'_2 + \lambda_3 \boldsymbol{e}'_3 \otimes \boldsymbol{e}'_3$$
$$= \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 \otimes \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 \otimes \boldsymbol{a}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{a}_3 \otimes \boldsymbol{a}_3$$

と表されることを述べている．ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を対称テンソル $\boldsymbol{S}$ の**主軸ベクトル**という．

2階のテンソル $\boldsymbol{T} = (T_{ij})$ が正則であるとする．それを線形変換の行列と考えるとき，T で表す．そのとき，行列の積として

$$(T_{ik}T_{jk}) = (T_{ik})^t(T_{kj}) = T^tT$$

は対称である． この行列の固有値を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ とすれば， 適当な直交行列 $A = (a_{ij})$ によって，T^tT は対角行列

$$(6) \qquad AT^tT^tA = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}; \qquad a_{il}a_{jm}T_{lk}T_{mk} = \alpha_i \delta_{ij} \quad (i \text{ について加えない})$$

に変換することができる．ベクトル $\boldsymbol{v} = (v_i)$ を (6) の両辺に縮合すれば，左辺は

$$v_iv_ja_{il}a_{jm}T_{lk}T_{mk} = (v_ia_{il}T_{lk})(v_ja_{jm}T_{mk})$$

となり，(　) 内の式は全く同じであるからこの式は

$$= \sum_{k=1}^{3} (v_i a_{il} T_{lk})^2$$

となる．これは式 (6) の右辺と $v_i v_j$ と縮合した式に等しく

$$\sum_{k=1}^{3} (v_i a_{il} T_{lk})^2 = \alpha_1 {v_1}^2 + \alpha_2 {v_2}^2 + \alpha_3 {v_3}^2$$

が成り立つ．任意のベクトル $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ に対して，左辺はつねに正であるから，α_1, α_2, α_3 はすべて正でなければならない．

$$\sqrt{\alpha_i} = \lambda_i > 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

とおき，

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

とすれば，式 (6) は

$$AT{}^tT{}^tA = \Lambda^2$$

となる．$A{}^tA = I$ に注意すれば，

$$T{}^tT = {}^tA\Lambda^2 A = {}^tA\Lambda A{}^tA\Lambda A$$

と表すことができる．

(7) $$S = {}^tA\Lambda A$$

とおけば，S は対称行列であり，

$$T{}^tT = S^2$$

となる．Λ も ${}^tA$ も正則であるから，S も正則であり，逆行列 S^{-1} が存在する．

$$S^{-1}T = R$$

とおけば，

$$T = SR$$

である．また行列 R について

$$\begin{aligned} {}^tRR &= {}^t(S^{-1}T)S^{-1}T = {}^tT{}^t(S^{-1})S^{-1}T = {}^tT({}^tS)^{-1}S^{-1}T \\ &= {}^tT(S^2)^{-1}T = {}^tT(T{}^tT)^{-1}T = {}^tT({}^tT)^{-1}T^{-1}T = I \end{aligned}$$

であるから，R は直交行列である．S の行列式は

$$|S| = |{}^tA||\Lambda||A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

であり，

$$|R| = |S^{-1}||T| = \frac{|T|}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$$

であるから，$|T| < 0$ のときは λ_1 の代りに $-\lambda_1$ を用いれば $|R| > 0$，すなわち R を回転行列であるようにとることができる．以上をまとめれば，

定理 9.2 2階のテンソル $\boldsymbol{T} = (T_{ij})$ が正則であるとき，適当な対称行列 $S = (S_{ij})$ と正の直交行列 $R = (R_{ij})$ を選んで行列 T を

$$T = SR; \qquad T_{ik} = S_{ij}R_{jk}$$

と表すことができる．

式 (7) はテンソル $\boldsymbol{S}$ が

$$\boldsymbol{S} = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 \otimes \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 \otimes \boldsymbol{a}_2 + \lambda_3\boldsymbol{a}_3 \otimes \boldsymbol{a}_3$$

とダイアディクの形で表すことができることを示している．さらに

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{R} = \boldsymbol{b}_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

とおけば，正則なテンソル $\boldsymbol{T}$ を

$$\boldsymbol{T} = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 \otimes \boldsymbol{b}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 \otimes \boldsymbol{b}_2 + \lambda_3\boldsymbol{a}_3 \otimes \boldsymbol{b}_3$$

と表すことができる．ここに $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ および $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ はそれぞれ直交基底をなしている．

2 直交テンソル解析

§1. テンソル関数

第1章に引き続いて，3次元空間で直交テンソルについて考察する．テンソルといえば直交テンソルを指すものとする．

ある区間を動く変数 t のおのおのの値に対してベクトル $\boldsymbol{v}(t)$ が定まるとき，$\boldsymbol{v}(t)$ を**ベクトル関数**という．直交基底 $\Sigma\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ に関して，

$$\boldsymbol{v}(t) = v_1(t)\boldsymbol{e}_1 + v_2(t)\boldsymbol{e}_2 + v_3(t)\boldsymbol{e}_3 = v_i(t)\boldsymbol{e}_i$$

と表すとき，成分 $v_i(t)$ は t の関数である．同様に変数 t のおのおのの値に対してテンソル $\boldsymbol{T}(t)$ が定まるとき，$\boldsymbol{T}(t)$ を**テンソル関数**という．たとえば $\boldsymbol{T}(t)$ が2階のテンソル関数であるとき

$$\boldsymbol{T}(t) = T_{ij}(t)\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j; \qquad \boldsymbol{T}(t) = (T_{ij}(t))$$

と表せば，すべての成分 $T_{ij}(t)$ は t の関数である．t の変化に対して変わらないテンソルを**定テンソル**という．その成分はすべて定数である．

変数 t の増分 Δt に対して

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \{\boldsymbol{T}(t + \Delta t) - \boldsymbol{T}(t)\}$$

が存在するならば，この極限のテンソルを値 t における $\boldsymbol{T}(t)$ の**微分係数**といい，

$$\frac{d\boldsymbol{T}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \{\boldsymbol{T}(t + \Delta t) - \boldsymbol{T}(t)\}$$

で表す．t のおのおのの値に対して $d\boldsymbol{T}(t)/dt$ が存在するとき，これをテンソル関数と考えて，$\boldsymbol{T}(t)$ の**テンソル導関数**という．$\boldsymbol{e}_i$ は定ベクトルであるから，

$$\frac{d\boldsymbol{T}(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\{T_{ij}(t+\Delta t)-T_{ij}(t)\}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$$
$$=\frac{dT_{ij}}{dt}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$$

であり，直交基底に関して $\boldsymbol{T}(t)$ を成分 $(T_{ij}(t))$ で表すとき，そのテンソル導関数は成分の導関数

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{dt}=\left(\frac{dT_{ij}}{dt}\right)$$

で表される．

直交基底変換

（1） $$\boldsymbol{e}'_i=a_{ij}\boldsymbol{e}_j$$

のもとで，成分の変換法則は

（2） $$T'_{ij}(t)=a_{ik}a_{jl}T_{kl}(t)$$

である．a_{ij} は定数であるから

$$\frac{dT'_{ij}}{dt}=a_{ik}a_{jl}\frac{dT_{kl}}{dt}$$

であり，これは $d\boldsymbol{T}/dt$ の成分もテンソルの成分の変換法則に従うことを示している．したがってテンソルの導関数の計算を成分の導関数の計算によって行うことができる．

普通の関数の微分と同様に，次の微分の公式が成り立つ．

定理 1.1 $\boldsymbol{S}(t)$, $\boldsymbol{T}(t)$ をテンソル関数，$\boldsymbol{K}$ を定テンソル，$f(t)$ を t の関数とするとき次の式が成り立つ．

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt}=\boldsymbol{O}\qquad\text{（零テンソル）}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T})=\frac{d\boldsymbol{S}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{T}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(f\boldsymbol{T})=\frac{df}{dt}\boldsymbol{T}+f\frac{d\boldsymbol{T}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{T})=\frac{d\boldsymbol{S}}{dt}\otimes\boldsymbol{T}+\boldsymbol{S}\otimes\frac{d\boldsymbol{T}}{dt}$$

また

定理 1.2　縮約・縮合と微分の順序は交換できる．たとえば

$$\frac{d}{dt}(S_{ij}T_{jk})=\frac{dS_{ij}}{dt}T_{jk}+S_{ij}\frac{dT_{jk}}{dt}$$

である．したがって，ベクトル関数 $\boldsymbol{u}(t)$, $\boldsymbol{v}(t)$, $\boldsymbol{w}(t)$ について次の公式が成り立つ．

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}|\boldsymbol{u}\ \ \boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{w}|=\left|\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\ \ \boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{w}\right|+\left|\boldsymbol{u}\ \ \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\ \ \boldsymbol{w}\right|+\left|\boldsymbol{u}\ \ \boldsymbol{v}\ \ \frac{d\boldsymbol{w}}{dt}\right|$$

第2式，第3式において因数のベクトルの順に注意しなければならない．

[証 明]

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})=\frac{d}{dt}(u_iv_i)=\frac{du_i}{dt}v_i+u_i\frac{dv_i}{dt}$$

$$=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})_i=\varepsilon_{ijk}u_jv_k$ であり，ε_{ijk} は定数であるから

$$\frac{d}{dt}\varepsilon_{ijk}u_jv_k=\varepsilon_{ijk}\frac{du_j}{dt}v_k+\varepsilon_{ijk}u_j\frac{dv_k}{dt}$$

$$=\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\times\boldsymbol{v}\right)_i+\left(\boldsymbol{u}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right)_i$$

第3式は $|\boldsymbol{u}\ \ \boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{w}|=\varepsilon_{ijk}u_iv_jw_k$ を微分すればよい．　◇

定理 1.3　ベクトル関数 $\boldsymbol{v}=(v_i)$ と交代テンソル関数 $\boldsymbol{V}=(V_{jk})$ が互いに付随しているならば，それらの導関数も互いに付随している．

$$V_{jk}=\varepsilon_{ijk}v_i \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dV_{jk}}{dt}=\varepsilon_{ijk}\frac{dv_i}{dt}$$

ベクトル関数が変数 t の任意の値に対して単位ベクトルであるとき**単位ベクトル関数**という．また2つのベクトル関数が t の任意の値に対してつねに直交しているとき**直交**であるという．

定理 1.4　3つのベクトル関数 $\boldsymbol{b}_1(t)$, $\boldsymbol{b}_2(t)$, $\boldsymbol{b}_3(t)$ が単位ベクトル関数で互いに直交しているならば，すなわち $\Sigma(t)\{\boldsymbol{b}_1(t),\ \boldsymbol{b}_2(t),\ \boldsymbol{b}_3(t)\}$ がつねに直交基底を作っているならば，そのベクトル導関数について

関係式

(3) $$\frac{d\boldsymbol{b}_i}{dt}=\Omega_{ij}\boldsymbol{b}_j$$

が成り立ち，$\boldsymbol{\Omega}=(\Omega_{ij})$ は交代なテンソル関数である．

(4) $$\Omega_{ij}+\Omega_{ji}=0$$

式 (3) をそれぞれのベクトルについて表せば

(5) $$\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{b}_1}{dt}= & \qquad\qquad \Omega_{12}\boldsymbol{b}_2+\Omega_{13}\boldsymbol{b}_3\\[2ex] \dfrac{d\boldsymbol{b}_2}{dt}= & \Omega_{21}\boldsymbol{b}_1 \qquad\qquad +\Omega_{23}\boldsymbol{b}_3\\[2ex] \dfrac{d\boldsymbol{b}_3}{dt}= & \Omega_{31}\boldsymbol{b}_1+\Omega_{32}\boldsymbol{b}_2\end{cases}$$

である．そして，$d\boldsymbol{b}_1/dt,\ d\boldsymbol{b}_2/dt,\ d\boldsymbol{b}_3/dt$ はつねに互いに1次従属である．

［証 明］ $\Sigma(t)$ が t の任意の値に対して直交基底をなすから，t の各値においてベクトル導関数 $d\boldsymbol{b}_i/dt$ を $\boldsymbol{b}_1(t),\ \boldsymbol{b}_2(t),\ \boldsymbol{b}_3(t)$ の1次結合で表すことができる．それを式 (3) の形におく．任意の t に対して

$$\boldsymbol{b}_i(t)\cdot\boldsymbol{b}_j(t)=\delta_{ij}$$

であるから，この両辺を t で微分して (3) を代入すれば

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{b}_i}{dt}\cdot\boldsymbol{b}_j+\boldsymbol{b}_i\cdot\frac{d\boldsymbol{b}_j}{dt}&=(\Omega_{ik}\boldsymbol{b}_k)\cdot\boldsymbol{b}_j+\boldsymbol{b}_i\cdot(\Omega_{jk}\boldsymbol{b}_k)\\&=\Omega_{ik}\delta_{kj}+\Omega_{jk}\delta_{ik}=\Omega_{ij}+\Omega_{ji}=0\end{aligned}$$

であり，関係式 (4) が導かれる．

(6) $$\left|\frac{d\boldsymbol{b}_1}{dt}\quad\frac{d\boldsymbol{b}_2}{dt}\quad\frac{d\boldsymbol{b}_3}{dt}\right|=\begin{vmatrix}0&\Omega_{12}&\Omega_{13}\\\Omega_{21}&0&\Omega_{23}\\\Omega_{31}&\Omega_{32}&0\end{vmatrix}$$

であり，この行列式とその転置行列式とを比較すれば

$$|\Omega_{ij}|=\begin{vmatrix}0&\Omega_{12}&\Omega_{13}\\\Omega_{21}&0&\Omega_{23}\\\Omega_{31}&\Omega_{32}&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&\Omega_{21}&\Omega_{31}\\\Omega_{12}&0&\Omega_{32}\\\Omega_{13}&\Omega_{23}&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-\Omega_{12}&-\Omega_{13}\\-\Omega_{21}&0&-\Omega_{23}\\-\Omega_{31}&-\Omega_{32}&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^3|\Omega_{ij}|$$

$$\therefore\quad |\Omega_{ij}|=0$$

である（一般に奇数次の交代な行列式の値は0である）．ゆえに3重積 (6) は0であり，$d\boldsymbol{b}_1/dt$, $d\boldsymbol{b}_2/dt$, $d\boldsymbol{b}_3/dt$ は互いに1次従属である．

$A=(a_{ij})$ を1つの直交行列として，t の任意の値に対して直交変換

$$\boldsymbol{b}_j(t)=a_{ij}\boldsymbol{b}'_i(t), \qquad \boldsymbol{b}'_i(t)=a_{ij}\boldsymbol{b}_j(t) \tag{7}$$

で得られる直交基底を $\Sigma'(t)\{\boldsymbol{b}'_1(t), \boldsymbol{b}'_2(t), \boldsymbol{b}'_3(t)\}$ で表し，この直交基底に関する方程式 (3) を

$$\frac{d\boldsymbol{b}'_i}{dt}=\Omega'_{ij}\boldsymbol{b}'_j \tag{8}$$

とする．式 (3), (7) を (8) に代入して

$$a_{ij}\Omega_{jk}\boldsymbol{b}_k=\Omega'_{ij}a_{jk}\boldsymbol{b}_k$$

を導き，$\boldsymbol{b}_k$ の係数を比較すれば

$$a_{ij}\Omega_{jk}=\Omega'_{ij}a_{jk}$$

あるいは，これに a_{lk} を掛けて k について加えれば

$$\Omega'_{il}=a_{ij}a_{lk}\Omega_{jk}$$

を得る．◇

$\boldsymbol{\Omega}$ に付随するベクトル $\boldsymbol{\omega}=(\omega_i)$ を

$$\omega_i=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Omega_{jk} \tag{9}$$

とおけば

$$\omega_1=\Omega_{23}, \quad \omega_2=\Omega_{31}, \quad \omega_3=\Omega_{12}$$

であり，方程式 (5) を

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{b}_1}{dt}= & \omega_3\boldsymbol{b}_2-\omega_2\boldsymbol{b}_3 \\ \dfrac{d\boldsymbol{b}_2}{dt}=-\omega_3\boldsymbol{b}_1 & +\omega_1\boldsymbol{b}_3 \\ \dfrac{d\boldsymbol{b}_3}{dt}= \omega_2\boldsymbol{b}_1-\omega_1\boldsymbol{b}_2 & \end{cases} \tag{10}$$

と書くことができる．

テンソル関数 $\tilde{\boldsymbol{T}}(t)$ の導関数がテンソル関数 $\boldsymbol{T}(t)$ であるとき，$\tilde{\boldsymbol{T}}(t)$ を $\boldsymbol{T}$ の**原始テンソル関数**または**不定積分**といい，

$$\tilde{\boldsymbol{T}}(t)=\int \boldsymbol{T}(t)dt$$

で表す．それぞれの成分を $\tilde{\boldsymbol{T}}=(\tilde{T}_{ij})$, $\boldsymbol{T}=(T_{ij})$ とすれば

$$\frac{d\tilde{T}_{ij}}{dt}=T_{ij}$$

であり，

$$\tilde{T}_{ij}=\int T_{ij}dt$$

で与えられる．直交変換 (1) のもとで，成分 T_{ij} は変換法則 (2) によって変換され，a_{ik} は定数であるから

$$\int T'_{ij}dt=\int a_{ik}a_{jl}T_{kl}dt=a_{ik}a_{jl}\int T_{kl}dt$$

であり，$\tilde{\boldsymbol{T}}$ の成分もテンソルの成分の変換法則

$$\tilde{T}'_{ij}=a_{ik}a_{jl}\tilde{T}_{kl}$$

に従っている．

定理 1.5 テンソル関数 $\boldsymbol{T}$ の原始テンソル関数 $\tilde{\boldsymbol{T}}$ は $\boldsymbol{T}$ と同じ階数のテンソル関数である．

のちに曲線座標系に関しては，この定理の適用には注意が必要である．

1つのテンソル関数の原始テンソル関数は無数に存在し，それらの任意の2つの差は定テンソルである．定理 1.1，定理 1.2 から，普通の積分法の公式と同様に，次の公式が成り立つ．

定理 1.6 $\boldsymbol{S}(t)$, $\boldsymbol{T}(t)$ をテンソル関数，$\boldsymbol{K}$ を定テンソル，k を定数とするとき，

$$\int\{\boldsymbol{S}(t)+\boldsymbol{T}(t)\}dt=\int \boldsymbol{S}(t)dt+\int \boldsymbol{T}(t)dt$$

$$\int\{k\boldsymbol{T}(t)\}dt=k\int \boldsymbol{T}(t)dt$$

$$\int\{\boldsymbol{K}\otimes\boldsymbol{T}(t)\}dt=\boldsymbol{K}\otimes\int \boldsymbol{T}(t)dt$$

$\tilde{\boldsymbol{T}}(t)=\int \boldsymbol{T}(t)dt$ とするとき

$$\int\{\boldsymbol{S}(t)\otimes\boldsymbol{T}(t)\}dt=\boldsymbol{S}(t)\otimes\tilde{\boldsymbol{T}}(t)-\int\left\{\frac{d\boldsymbol{S}}{dt}\otimes\tilde{\boldsymbol{T}}\right\}dt$$

定理 1.7　縮約・縮合と不定積分の順序は交換できる.

この定理はベクトルの内積あるいはベクトル積などの積分の際に用いることができる.

変数 t のある区間 $[\alpha, \beta]$ におけるテンソル関数 $\boldsymbol{T}(t)=(T_{ij}(t))$ の**定積分**は

$$\int_\alpha^\beta \boldsymbol{T}(t)dt=\left(\int_\alpha^\beta T_{ij}(t)dt\right)$$

によって定義される. これは1つの定テンソルである.

問　　題

1.　次のベクトル関数のベクトル導関数を求めよ.

(1)　$\boldsymbol{r}=\left(4t,\ t^2,\ \dfrac{1}{t}\right)$

(2)　$\boldsymbol{r}=(t\cos t,\ t\sin t,\ t)$

(3)　$\boldsymbol{r}=(e^t,\ \log(t^2+1),\ -\tan^{-1}t)$

2.　ベクトル関数 $\boldsymbol{v}(t)$ の長さを $v(t)$, $\boldsymbol{v}(t)$ の方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{l}(t)$ とするとき, 次の式またはことがらを証明せよ.

(1)　$\boldsymbol{v}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}=v\dfrac{dv}{dt}$　　(2)　$\boldsymbol{v}\times\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}=v^2\left(\boldsymbol{l}\times\dfrac{d\boldsymbol{l}}{dt}\right)$

(3)　$v(t)$ が一定ならば $\boldsymbol{v}$ と $\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ は垂直である.

3.　次の性質をもつベクトル関数 $\boldsymbol{r}$ を求めよ. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は定ベクトルとする.

(1)　$\boldsymbol{a}\times\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{0}$　　(2)　$\boldsymbol{a}\times\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{b}$　　$(\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b})$

(3)　$\boldsymbol{r}\times\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{0}$

[解　　答]

1.　(1)　$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\left(4,\ 2t,\ -\dfrac{1}{t^2}\right)$

(2)　$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}=(\cos t-t\sin t,\ \sin t+t\cos t,\ 1)$

(3)　$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\left(e^t,\ \dfrac{2t}{t^2+1},\ -\dfrac{1}{t^2+1}\right)$

2. (1) $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=|\boldsymbol{v}|^2=v^2$ の両辺を微分すれば，$2\boldsymbol{v}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}=2v\dfrac{dv}{dt}$

(2)
$$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{l},\qquad \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{l}+v\frac{d\boldsymbol{l}}{dt}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{v}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=v\boldsymbol{l}\times\left(\frac{dv}{dt}\boldsymbol{l}+v\frac{d\boldsymbol{l}}{dt}\right)=v^2\boldsymbol{l}\times\frac{d\boldsymbol{l}}{dt}\qquad(\because\ \boldsymbol{l}\times\boldsymbol{l}=0)$$

(3) (1) から $\boldsymbol{v}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}=0$. ゆえに $\boldsymbol{v}\perp\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$

3. (1) $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}/\!/\boldsymbol{a}$ であるから $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}=f(t)\boldsymbol{a}$ と書くことができる．両辺を積分して

$$\boldsymbol{r}=\left(\int f(t)dt\right)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\qquad(\boldsymbol{c}\text{ は定ベクトル})$$
$$=F(t)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$$

(2) 両辺をさらに t で微分すれば $\boldsymbol{a}\times\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=0$. ゆえに (1) により

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=F(t)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}_1\qquad(\boldsymbol{c}_1\text{ は定ベクトル})\qquad ①$$

と表すことができる．これをもとの式に代入すれば $\boldsymbol{a}\times(F(t)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}_1)=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}_1$ であるから，$\boldsymbol{c}_1$ は $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}_1=\boldsymbol{b}$ を満たさなければならない．式 ① を積分すれば

$$\boldsymbol{r}=g(t)\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{c}_1+\boldsymbol{c}_2\qquad\left(g(t)=\int F(t)dt,\ \boldsymbol{c}_2\text{ は定ベクトル}\right)$$

と表すことができる．

(3) $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}/\!/\boldsymbol{r}$ であるから，$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}=f(t)\boldsymbol{r}$ の形に表すことができる．$\boldsymbol{r}=(x_1,x_2,x_3)$ とすれば，各成分は

$$\frac{dx_i}{dt}=f(t)x_i$$

の解である．これを解けば

$$\log x_i=\int f(t)dt+c'_i$$
$$\therefore\quad x_i=F(t)c_i\qquad(F(t)=e^{\int f(t)dt},\ c_i=e^{c'_i})$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{r}=F(t)\boldsymbol{c}\qquad(\boldsymbol{c}\text{ は定ベクトル})$$

の形に表される．$\boldsymbol{r}$ は定方向に向かうベクトルである．

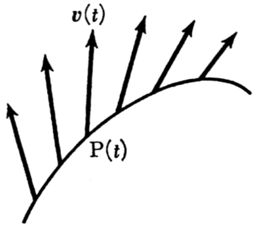
§2. 曲線と質点の運動

空間に点 O を原点とする直交基底 $\Sigma\{\mathrm{O},\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ をとる．

変数 t のおのおのの値に対して点 $\mathrm{P}(t)$ が定まるとき，その座標を $(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$ で表せば，$\mathrm{P}(t)$ の位置ベクトルは

(1) $$\boldsymbol{r}(t)=\overrightarrow{\mathrm{OP}}(t)=x_1(t)\boldsymbol{e}_1+x_2(t)\boldsymbol{e}_2+x_3(t)\boldsymbol{e}_3$$

と表される. t が変化するに従って点 $\mathrm{P}(t)$ は一般に曲線 C をえがく. 式 (1) をその曲線の**ベクトル方程式**または単に方程式という. 座標の関数 $x_i(t)$ が微分可能で, 導関数 dx_i/dt が連続であるとき, 曲線は**微分可能**である, または**滑らか**であるという.



2-1図

ベクトル $\boldsymbol{v}(t)$ やテンソル $\boldsymbol{T}(t)$ が曲線 C の各点 $\mathrm{P}(t)$ で定義されているとき, それらを曲線 C の上で定義された**ベクトル場**または**テンソル場**という.

曲線 C の方程式 (1) のベクトル導関数

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{dx_1}{dt}\boldsymbol{e}_1+\frac{dx_2}{dt}\boldsymbol{e}_2+\frac{dx_3}{dt}\boldsymbol{e}_3$$

は, 曲線 C の上で定義されるベクトル場であり, $d\boldsymbol{r}/dt\neq\boldsymbol{0}$ である点 $\mathrm{P}(t)$ では接線の向きを与える. $d\boldsymbol{r}/dt$ を**接線ベクトル**といい, $d\boldsymbol{r}/dt\neq\boldsymbol{0}$ である点 $\mathrm{P}(t)$ を**普通点**といい, $d\boldsymbol{r}/dt=\boldsymbol{0}$ である点を**特異点**という. 以下とくに断らない場合は, 曲線は微分可能であり, その特異点を除いて考えることにする.

接線ベクトルの長さは

$$(2)\qquad \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|=\sqrt{\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_i}{dt}}=\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2}$$

で与えられる.

曲線 C の 1 点 $\mathrm{P}(\alpha)$ から点 $\mathrm{P}(t)$ までの曲線弧の長さを s とすれば, 積分法で知られているように, s は

$$(3)\qquad s=\int_\alpha^t\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2}\,dt=\int_\alpha^t\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|dt$$

で与えられる. この被積分関数は, 各点 $\mathrm{P}(t)$ における接線ベクトルの長さである.

曲線弧の長さ s は $\mathrm{P}(t)$ の変化に従って変わるから, t の関数であり, (3) を t で微分すれば

$$(4)\qquad \frac{ds}{dt}=\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|=\sqrt{\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_i}{dt}}$$

である．この式は特異点を除けばつねに正であるから，s は t の増加関数である．したがって逆関数が存在して t を s の関数として，$t=t(s)$ と表すことができる．これを曲線の方程式に代入すれば，曲線の方程式を

$$\text{(5)}\qquad \boldsymbol{r}(s)=\overrightarrow{\mathrm{OP}}(s)=x_1(s)\boldsymbol{e}_1+x_2(s)\boldsymbol{e}_2+x_3(s)\boldsymbol{e}_3$$

と表すことができる．この媒介変数 s は曲線の性質に本質的に結びついているものであって，**弧長媒介変数**といわれる．微分を用いて式 (4) を表せば

$$\text{(6)}\qquad ds=|d\boldsymbol{r}|=\sqrt{dx_i dx_i}=\sqrt{(dx_1)^2+(dx_2)^2+(dx_3)^2}$$

であり，これをユークリッド空間の**線素**という．

曲線の方程式 (5) の s についてのベクトル導関数は，(4) を用いて

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{dt}{ds}\qquad \therefore\quad \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right|=\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|\frac{dt}{ds}=1$$

である．

$$\text{(7)}\qquad \boldsymbol{t}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\left(\frac{dx_1}{ds},\ \frac{dx_2}{ds},\ \frac{dx_3}{ds}\right)$$

とおけば，$\boldsymbol{t}$ は曲線 C の各点において長さ 1 の接線ベクトルであり，これを曲線 C の**単位接線ベクトル**という．

$$|\boldsymbol{t}|^2=\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}=1$$

の両辺を s で微分すれば

$$\boldsymbol{t}\cdot\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=0\qquad \therefore\quad \frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\perp\boldsymbol{t}$$

である．

s のある区間において，つねに

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=\boldsymbol{0}$$

ならば，これを積分して

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}s+\boldsymbol{b}\qquad (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\ \text{は定ベクトル})$$

の形に表されるから，曲線 C は直線である．

直線の場合を除いて，曲線 C の各点 $\mathrm{P}(s)$ で，$d\boldsymbol{t}/ds$ と同じ向きをもつ単位ベクトルが定まるから，これを $\boldsymbol{n}(s)$ で表し，点 $\mathrm{P}(s)$ における曲線 C の**単位主法線ベクトル**という．$\mathrm{P}(s)$ を通り $\boldsymbol{n}(s)$ の方向の直線を，その点

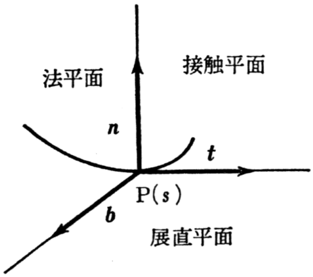
における曲線 C の**主法線**という．$d\boldsymbol{t}/ds \parallel \boldsymbol{n}$ であるから

$$(8)\qquad \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \kappa(s)\boldsymbol{n}$$

とおけば

$$(9)\quad \kappa(s) = \left|\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right| = \left|\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x_1}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x_2}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x_3}{ds^2}\right)^2}$$

である．



2-2図

$d\boldsymbol{t}/ds \neq \boldsymbol{0}$ のとき，各点 P(s) において，ベクトル $\boldsymbol{b}(s)$ を

$$(10)\qquad \boldsymbol{b}(s) = \boldsymbol{t}(s) \times \boldsymbol{n}(s)$$

で定義し，これを点 P(s) における曲線 C の**単位従法線ベクトル**といい，P(s) を通り $\boldsymbol{b}(s)$ の方向の直線を P(s) における C の**従法線**という．$\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\}$ は C の各点 P(s) において右手系の直交基底を作っている．

点 P(s) においてベクトル $\boldsymbol{t}(s)$ と $\boldsymbol{n}(s)$ の張る平面を曲線 C の**接触平面**，$\boldsymbol{n}(s)$ と $\boldsymbol{b}(s)$ の張る平面を**法平面**，そして $\boldsymbol{t}(s)$ と $\boldsymbol{b}(s)$ の張る平面を**展直平面**という．

定理 2.1 フルネー・セレーの公式 曲線に沿って関係式

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{t}}{ds} = & \kappa\boldsymbol{n} & \\ \dfrac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -\kappa\boldsymbol{t} & & +\tau\boldsymbol{b} \\ \dfrac{d\boldsymbol{b}}{ds} = & -\tau\boldsymbol{n} & \end{cases}$$

が成り立つ．ここに $\kappa(s)$ は式 (9) により，また $\tau(s)$ は $\kappa(s) \neq 0$ のとき

(12)

$$\tau(s) = \frac{1}{\kappa^2}\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\ \ \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\ \ \frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\right| = \frac{1}{(x_1'')^2 + (x_2'')^2 + (x_3'')^2}\begin{vmatrix} x_1' & x_1'' & x_1''' \\ x_2' & x_2'' & x_2''' \\ x_3' & x_3'' & x_3''' \end{vmatrix}$$

で与えられる．最右辺の式で $'$ は s についての微分を示す．

公式 (11) を**フルネー・セレーの公式**といい，$\kappa(s)$, $\tau(s)$ をそれぞれ曲線 C の点 $\mathrm{P}(s)$ における**曲率**および**捩率**といい，$\rho(s)=1/\kappa(s)$ を**曲率半径**という．

［**証 明**］ $\Sigma(s)\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\}$ は C に沿って直交基底を作っているから，§1 の定理 1.4 の関係式 (5) が適用できる．その際 $\boldsymbol{n}(s)$ の定め方 (8) から，

$$\Omega_{13}=0$$

である．Ω_{ij} の交代性を考慮して

$$\Omega_{12}=-\Omega_{21}=\kappa, \qquad \Omega_{23}=-\Omega_{32}=\tau$$

とおけば，フルネー・セレーの公式 (11) が導かれる．式 (8) の両辺を $\kappa(s)$ で割った式および式 (10) を s で微分すれば，$\boldsymbol{t}' /\!/ \boldsymbol{n}$ であることを考慮して

$$\boldsymbol{n}'=\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{t}''-\frac{\kappa'}{\kappa^2}\boldsymbol{t}'$$

$$\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{t}'\times\boldsymbol{n}+\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}'=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}'$$

であり，公式 (11) の第3式から，τ は

$$\begin{aligned}\tau&=-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}'=-\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}')=|\boldsymbol{t}\ \ \boldsymbol{n}\ \ \boldsymbol{n}'|\\&=\left|\boldsymbol{t}\ \ \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{t}'\ \ \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{t}''-\frac{\kappa'}{\kappa^2}\boldsymbol{t}'\right|=\frac{1}{\kappa^2}|\boldsymbol{t}\ \ \boldsymbol{t}'\ \ \boldsymbol{t}''|\\&=\frac{1}{\kappa^2}|\boldsymbol{r}'\ \ \boldsymbol{r}''\ \ \boldsymbol{r}'''|\end{aligned}$$

で与えられる． ◇

時間を t で示し，運動する質点 $\mathrm{P}(t)$ のえがく曲線を C とする．各点 $\mathrm{P}(t)$ の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)=(x_1, x_2, x_3)$ の時間 t に関するベクトル導関数

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{dx_1}{dt}\boldsymbol{e}_1+\frac{dx_2}{dt}\boldsymbol{e}_2+\frac{dx_3}{dt}\boldsymbol{e}_3 \tag{13}$$

すなわち

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}\right)$$

を**速度ベクトル**といい，さらに第2次ベクトル導関数

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}, \frac{d^2x_2}{dt^2}, \frac{d^2x_3}{dt^2}\right) \tag{14}$$

を**加速度ベクトル**という.

力学の基礎であるニュートンの第2法則は

「力 $\boldsymbol{f}$ の作用を受けて運動する質点 P の加速度は力 $\boldsymbol{f}$ に比例する」

である. この法則はベクトル方程式

$$m\boldsymbol{a}=m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{f} \tag{15}$$

の形に表される. これをニュートンの**運動方程式**という. 比例因数 m を質点 P の**質量**という. 方程式 (15) はまた

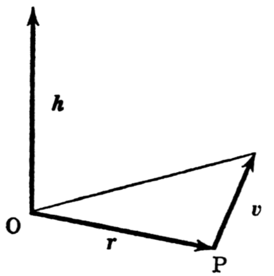
$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{f} \tag{16}$$

と書くことができる. ベクトル $m\boldsymbol{v}$ を質点 P の**運動量**といい, 上述の第2法則を

「運動する質点の運動量の時間に対する変化率は作用する力に等しい」

といい替えることができる.

さて, 1点 O に関して, 運動する質点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ として,



2-3図

$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$　を点 O に関する**速度モーメント**,

$(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})/2$　を**面積速度ベクトル**,

$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{r}\times(m\boldsymbol{v})$　を**運動量モーメント**または**角運動量**,

$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}$　を力 $\boldsymbol{f}$ の**モーメント**

という. 角運動量の時間についてのベクトル導関数は

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{h}}{dt}&=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v})\\&=m\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}+m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}\\&=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}\end{aligned} \tag{17}$$

すなわち, 角運動量の時間についての変化率は力 $\boldsymbol{f}$ のモーメントに等しい.

剛体が運動しているとき, 空間に固定された直交基底を $\Sigma\{\mathrm{O},\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$ とし, 一方剛体に1つの直交基底 $\Sigma(t)\{\mathrm{O}(t),\ \boldsymbol{b}_1(t),\ \boldsymbol{b}_2(t),\ \boldsymbol{b}_3(t)\}$ を固定す

る．剛体の運動を記述するには，Σ に関する $\Sigma(t)$ の運動を調べればよい．$\Sigma(t)$ を**回転座標系**という．そのとき定理 1.4 により，§1 の式 (3) すなわち §1 の (5) が成り立つ．

任意の t に対して回転座標系 $\Sigma(t)$ で，

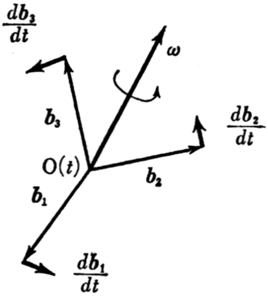
$$\boldsymbol{b}_2\times\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{b}_1,\qquad \boldsymbol{b}_3\times\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{b}_2,\qquad \boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{b}_3$$

が成り立つ．$\Sigma(t)$ に関して

(18) $$\boldsymbol{\omega}=\omega_1\boldsymbol{b}_1+\omega_2\boldsymbol{b}_2+\omega_3\boldsymbol{b}_3=\omega_i\boldsymbol{b}_i$$

で定義されるベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を用いれば，たとえば

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{b}_1&=\omega_2\boldsymbol{b}_2\times\boldsymbol{b}_1+\omega_3\boldsymbol{b}_3\times\boldsymbol{b}_1\\&=\omega_3\boldsymbol{b}_2-\omega_2\boldsymbol{b}_3\\&=\Omega_{12}\boldsymbol{b}_2+\Omega_{13}\boldsymbol{b}_3\end{aligned}$$



2-4 図

であるから，§1 の方程式 (5) を

(19) $$\frac{d\boldsymbol{b}_1}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{b}_1,\qquad \frac{d\boldsymbol{b}_2}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{b}_2,\qquad \frac{d\boldsymbol{b}_3}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{b}_3$$

の形に，あるいは一まとめにして

(20) $$\frac{d\boldsymbol{b}_i}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{b}_i$$

と書くことができる．第 1 章 例 7.1 で述べたように，この式は $\Sigma(t)$ の各ベクトル $\boldsymbol{b}_i$ が角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ をもつ回転運動をしていることを示している．この場合ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を回転座標系 $\Sigma(t)$ の**角速度ベクトル**といい，$\boldsymbol{\Omega}=(\Omega_{ij})$ を**角速度テンソル**という．第 1 章 例 7.1 では一定の角速度をもつ回転運動を取り扱ったわけである．

ベクトル関数 $\boldsymbol{a}(t)$ が $\Sigma(t)$ に関して

$$\boldsymbol{a}(t)=a^*{}_1\boldsymbol{b}_1+a^*{}_2\boldsymbol{b}_2+a^*{}_3\boldsymbol{b}_3=a^*{}_i(t)\boldsymbol{b}_i(t)$$

と表されたとする．そのとき

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=\frac{da^*{}_1}{dt}\boldsymbol{b}_1+\frac{da^*{}_2}{dt}\boldsymbol{b}_2+\frac{da^*{}_3}{dt}\boldsymbol{b}_3+a^*{}_1\frac{d\boldsymbol{b}_1}{dt}+a^*{}_2\frac{d\boldsymbol{b}_2}{dt}+a^*{}_3\frac{d\boldsymbol{b}_3}{dt}$$

あるいはまとめて

(21) $$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=\frac{da^*{}_i}{dt}\boldsymbol{b}_i+a^*{}_i\frac{d\boldsymbol{b}_i}{dt}$$

である.

$$\frac{da^*_1}{dt}\boldsymbol{b}_1+\frac{da^*_2}{dt}\boldsymbol{b}_2+\frac{da^*_3}{dt}\boldsymbol{b}_3=\frac{d^*\boldsymbol{a}}{dt}$$

と書くことにすれば，式 (20) を用いて，式 (21) は

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=\frac{d^*\boldsymbol{a}}{dt}+a^*_i(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{b}_i)$$

と表される．すなわち，

(22) $$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=\frac{d^*\boldsymbol{a}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{a}$$

が成り立つ．$d\boldsymbol{a}/dt$ をベクトル関数 $\boldsymbol{a}(t)$ の**絶対導関数**といい，$d^*\boldsymbol{a}/dt$ を運動する回転座標系 $\Sigma(t)$ に関する**相対導関数**という．式 (22) はこれらの導関数の間の関係を与えており，**回転座標系の公式**といわれる．

任意のベクトル関数 $\boldsymbol{a}(t)$ に対して $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{a}$ の $\Sigma(t)$ に関する成分は

$$(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{a})_1=\omega_2a^*_3-\omega_3a^*_2=\Omega_{31}a^*_3+\Omega_{21}a^*_2$$

であり，同様にして

$$(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{a})_i=\Omega_{ji}a^*_j=-\Omega_{ij}a^*_j$$

で表されるから

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{a}=-\Omega(\boldsymbol{a})$$

である．

剛体が 1 点 O のまわりに回転しているとき，空間に固定された座標系 Σ と剛体に固定された回転座標系 $\Sigma(t)$ の原点をともに O とし，$\Sigma(t)$ の角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega}$ とする．剛体の 1 点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とし，また Σ および $\Sigma(t)$ に関する点 P の座標をそれぞれ (x_1, x_2, x_3) および (x^*_1, x^*_2, x^*_3) とすれば

$$\boldsymbol{r}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3=x^*_1\boldsymbol{b}_1+x^*_2\boldsymbol{b}_2+x^*_3\boldsymbol{b}_3$$

であり，x^*_1, x^*_2, x^*_3 は一定である．ゆえに $\Sigma(t)$ に関する点 P の相対速度ベクトル $d^*\boldsymbol{r}/dt$ は

$$\frac{d^*\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{0}$$

であり，点 P の速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ は公式 (22) により

$$v=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=-\Omega(\boldsymbol{r}) \tag{23}$$

で与えられる．点 P における質量を m とすれば，点 O に関する質点 P の角運動量 $\boldsymbol{h}(\mathrm{P})$ は

$$\boldsymbol{h}(\mathrm{P})=m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}=m\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$$

となる．

以下は，第1章 例 7.2 と同様にして，角運動量ベクトルは

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}(\mathrm{P})&=m\{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}\}\\ h_i&=m\{(x^*_kx^*_k)\omega_i-(x^*_j\omega_j)x^*_i\}\\ &=m\{(x^*_kx^*_k)\delta_{ij}-x^*_ix^*_j\}\omega_j\end{aligned}$$

角運動量テンソルは

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}&=m(\boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{r})\\ &=m(\Omega(\boldsymbol{r})\otimes\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}\otimes\Omega(\boldsymbol{r}))\,;\\ H_{jk}&=m(x^*_jv_k-x^*_kv_j)\\ &=m(\Omega_{jl}x^*_lx^*_k-\Omega_{kl}x^*_lx^*_j)\end{aligned} \tag{24}$$

と表される．慣性テンソル $\boldsymbol{J}$ は $\sum^*(t)$ に関して

$$\boldsymbol{J}_{ij}(\mathrm{P})=m\{(x^*_kx^*_k)\delta_{ij}-x^*_ix^*_j\}$$

で与えられ，この成分は各点 P に対しては $\sum^*(t)$ に関して定数である．4階の慣性テンソルは

$$J_{ijkl}=m(\delta_{ik}x^*_jx^*_l-\delta_{jk}x^*_ix^*_l)$$

である．これらの間の関係は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}=J(\boldsymbol{\omega})\,;\qquad h_i&=J_{ij}\omega_j\\ H_{ij}&=J_{ijkl}\Omega_{kl}\end{aligned} \tag{25}$$

である．

問　　題

1. 次の曲線の単位接線ベクトル，単位主法線ベクトル，単位従法線ベクトル，曲率，捩率を求めよ．

(1) $\boldsymbol{r}=(a(3t-t^3),\ 3at^2,\ a(3t+t^3))$ 　　(a は定数，$a>0$)

(2) $\boldsymbol{r}=(a\log\cos t,\ a\log\sin t,\ \sqrt{2}\,at)$ 　　(a は定数，$a>0$)

（3） $\boldsymbol{r}=(e^t,\ e^{-t},\ \sqrt{2}\,t)$

2. 曲線 C に沿って運動する質点の速度ベクトルを $\boldsymbol{v}$, $|\boldsymbol{v}|=v$, 加速度ベクトルを $\boldsymbol{a}$, 時間を t, 曲線の弧長媒介変数を s, 単位接線ベクトルを $\boldsymbol{t}$, 単位主法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$, 曲率を κ とするとき，次の式を証明せよ．

（1） $\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{t},\ v=\dfrac{ds}{dt}$

（2） $\boldsymbol{a}=\dfrac{dv}{dt}\boldsymbol{t}+\kappa v^2\boldsymbol{n}$

$\alpha_t=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2s}{dt^2}$, $\alpha_n=\kappa v^2$ をそれぞれ加速度の**接線成分**，**法線成分**という．

（3） $\kappa=\dfrac{|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}|}{v^3}$

3. 力 $\boldsymbol{f}$ が時刻 $t=\alpha$ から $t=\beta$ まで作用するとき，$\int_\alpha^\beta \boldsymbol{f}\,dt$ をその時間における力 $\boldsymbol{f}$ の**力積**という．$\boldsymbol{f}$ の作用を受けて運動する質点の質量を m, 速度ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とするとき，ある時間における力積は，その間に生じた質点の運動量 $m\boldsymbol{v}$ の変化に等しいことを示せ．

4. 力 $\boldsymbol{f}$ の作用を受けて1点 O のまわりを回転する質点 P(t) の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とするとき，力 $\boldsymbol{f}$ のモーメント $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}$ に付随する2階のテンソル $\boldsymbol{M}=(M_{jk})$ を力 $\boldsymbol{f}$ の**モーメント・テンソル**という．$\boldsymbol{H}$ を角運動量テンソルとして，

（1） $\boldsymbol{M}$ を $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{f}$ で表せ．

（2） $\dfrac{d\boldsymbol{H}}{dt}=\boldsymbol{M}$, したがって $\dfrac{d}{dt}(J_{jklm}\Omega_{lm})=M_{jk}$

が成り立つことを証明せよ．

［解　　答］

1. t についての微分を $'$ で示す．

（1） $\boldsymbol{r}'=3a(1-t^2,\ 2t,\ 1+t^2)$, 　　$|\boldsymbol{r}'|=\dfrac{ds}{dt}=3\sqrt{2}\,a(1+t^2)$.

$$\boldsymbol{t}=\frac{dt}{ds}\boldsymbol{r}'=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2},\ 1\right).$$

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\frac{dt}{ds}\boldsymbol{t}'=\frac{1}{3a(1+t^2)^3}(-2t,\ 1-t^2,\ 0).\qquad \kappa=\left|\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right|=\frac{1}{3a(1+t^2)^2}.$$

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\kappa}\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\frac{1}{1+t^2}(-2t,\ 1-t^2,\ 0).$$

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}=\frac{-1}{\sqrt{2}(1+t^2)}(1-t^2,\ 2t,\ -(1+t^2)).$$

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=\frac{dt}{ds}\boldsymbol{b}'=\frac{-1}{3a(1+t^2)^3}(-2t,\ 1-t^2,\ 0)=\frac{-1}{3a(1+t^2)^2}\boldsymbol{n}.$$

$$\tau=\frac{1}{3a(1+t^2)^2}$$

(2) $\boldsymbol{r}'=a(-\tan t,\ \cot t,\ \sqrt{2}),\qquad |\boldsymbol{r}'|=\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{a}{\sin t\cos t}.$

$$\boldsymbol{t}=(-\sin^2 t,\ \cos^2 t,\ \sqrt{2}\sin t\cos t).$$

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\frac{1}{2a}(-\sin^2 2t,\ -\sin^2 2t,\ \sqrt{2}\sin 2t\cos 2t).\qquad \kappa=\frac{1}{\sqrt{2}a}\sin 2t.$$

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin 2t,\ -\sin 2t,\ \sqrt{2}\cos 2t).$$

$$\boldsymbol{b}=(\cos^2 t,\ -\sin^2 t,\ \sqrt{2}\sin t\cos t).\qquad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=\frac{\sin 2t}{\sqrt{2}a}\boldsymbol{n}.\qquad \tau=-\frac{\sin 2t}{\sqrt{2}a}.$$

(3) $\boldsymbol{r}'=(e^t,\ -e^{-t},\ \sqrt{2}),\qquad |\boldsymbol{r}'|=\dfrac{ds}{dt}=e^t+e^{-t}.$

$$\boldsymbol{t}=\frac{1}{e^t+e^{-t}}(e^t,\ -e^{-t},\ \sqrt{2}).\qquad \frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\frac{1}{(e^t+e^{-t})^3}(2,\ 2,\ -\sqrt{2}(e^t-e^{-t})).$$

$$\kappa=\frac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}.\qquad \boldsymbol{n}=\frac{1}{e^t+e^{-t}}(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ -(e^t-e^{-t})).$$

$$\boldsymbol{b}=\frac{1}{e^t+e^{-t}}(-e^{-t},\ e^t,\ \sqrt{2}).$$

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=\frac{1}{(e^t+e^{-t})^3}(2,\ 2,\ -\sqrt{2}(e^t-e^{-t}))=\frac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}\boldsymbol{n}.$$

$$\tau=-\frac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}$$

2. (1) $\boldsymbol{v}=\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\dfrac{ds}{dt}\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\dfrac{ds}{dt}\boldsymbol{t}.$ $\boldsymbol{t}$ は単位ベクトルであるから

$|\boldsymbol{v}|=\dfrac{ds}{dt}=v.$

(2) フルネー・セレーの公式により

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{t}+v\frac{ds}{dt}\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{t}+v^2\kappa\boldsymbol{n}$$

(3) (1) と (2) の式のベクトル積を作れば

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}=\kappa v^3\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}=\kappa v^3\boldsymbol{b}$$

$|\boldsymbol{b}|=1$ であるから, $|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}|=\kappa v^3.$

3. 運動方程式により $\qquad m\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=m\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{f}.$

$$\therefore\quad \int_\alpha^\beta \boldsymbol{f}\,dt=\int_\alpha^\beta m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\,dt=m\Big[\boldsymbol{v}\Big]_\alpha^\beta=m\boldsymbol{v}(\beta)-m\boldsymbol{v}(\alpha).$$

4. (1)
$$M_{jk} = \varepsilon_{ijk}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f})_i = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}x_l f_m$$
$$= (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})x_l f_m = x_j f_k - x_k f_j.$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \otimes \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{r}$$

(2) $\boldsymbol{H} = m(\boldsymbol{r} \otimes \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{r})$ を微分すれば,
$$\frac{d\boldsymbol{H}}{dt} = m(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \otimes \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v})$$
$$= \boldsymbol{r} \otimes \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{r} = \boldsymbol{M}.$$

§3. 2変数のテンソル関数と曲面

2つの変数 u, v が uv 平面の1つの領域 D の中を動くとき，(u, v) の関数 $f(u, v)$ を uv 平面の領域 D で定義された2変数の**スカラー関数**という．

一般に，領域 D の (u, v) のおのおのの値の対に対して空間内に1つのベクトル $\boldsymbol{a}(u, v)$ あるいはテンソル $\boldsymbol{T}(u, v)$ が定まるならば，それらを領域 D で定義された2変数の**ベクトル関数**または**テンソル関数**という．それらの成分はいずれも2変数の関数

$$\boldsymbol{a}(u, v) = (a_1(u, v),\ a_2(u, v),\ a_3(u, v))$$
$$\boldsymbol{T}(u, v) = (T_{ij}(u, v))$$

で与えられる．

1変数のテンソル関数の導関数と同様に，テンソル偏導関数が定義され，それは成分

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial u} = \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial u}\right), \qquad \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial v} = \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial v}\right)$$

で与えられる．定理 1.1 の公式は，常微分を偏微分におき換えることによって，テンソル偏導関数についてもすべて成り立つ．定理 1.2 の公式も，ベクトル偏導関数についてすべて成り立つ．

領域 D で定義された2変数のスカラー関数 $f(u, v)$ の重積分は

$$\iint_D f(u, v)\,dudv$$

で書かれる．同様に，2変数のテンソル関数 $\boldsymbol{T}(u, v)$ の領域 D における重積分

$$\tilde{\boldsymbol{T}}=\iint_D \boldsymbol{T}(u,\ v)dudv$$

は成分の重積分

$$(\tilde{T}_{ij})=\left(\iint_D T_{ij}(u,\ v)dudv\right)$$

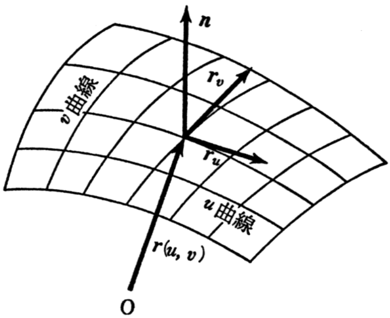
で与えられる．1変数の場合の定理 1.5 と同様に，$\tilde{\boldsymbol{T}}$ もテンソルである．

点 P(x_i) の位置ベクトルが領域 D における2変数 $u,\ v$ のベクトル関数

（1）

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,\ v);\qquad x_i=x_i(u,\ v)$$

であるとき，点 P は一般に曲面 S をえがく．このとき，式 (1) を曲面 S の**ベクトル方程式**という．



2－5図

v を一定にして，u だけ変化させるとき，点 P$(u,\ v)$ は曲面 S 上の曲線をえがく．これを **u 曲線**といい，同様に **v 曲線**が定義される．これら2つの曲線群を合わせて，**媒介変数曲線**という．

（2）
$$\begin{cases}\boldsymbol{r}_u=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}=\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial u},\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u},\ \dfrac{\partial x_3}{\partial u}\right)\\[2ex]\boldsymbol{r}_v=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}=\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial v},\ \dfrac{\partial x_2}{\partial v},\ \dfrac{\partial x_3}{\partial v}\right)\end{cases}$$

とおけば，各点 P において $\boldsymbol{r}_u,\ \boldsymbol{r}_v$ はそれぞれ u 曲線と v 曲線の接線ベクトルである．$\boldsymbol{r}_u$ と $\boldsymbol{r}_v$ が互いに1次従属である点を曲面 S の**特異点**という．そうでない点を**普通点**といい，今後とくに断らない場合は普通点だけ取り扱うものとする．

曲面 S の各点 P において $\boldsymbol{r}_u$ と $\boldsymbol{r}_v$ で張られる平面を P における S の**接平面**といい，P を通り接平面に垂直な直線を曲面 S の**法線**という．接平面上の任意の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とするとき，接平面の方程式は

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(u,\ v)\quad \boldsymbol{r}_u\quad \boldsymbol{r}_v|=0$$

である．$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$ は接平面に垂直であるから法線方向の単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ は

（3）
$$\boldsymbol{n}=\pm\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}$$

で与えられる．この選び方は曲面の各点で2通りあるが，曲面の上で連続であるように（+ か − の一方を）選ぶ．このとき $\boldsymbol{n}$ を曲面 S の**単位法線ベクトル**という．今後 + の符号をとるものとする．

位置ベクトルが $\boldsymbol{r}(u, v)$ で与えられる曲面 S の各点 P にスカラー関数 $f(\mathrm{P})$ またはテンソル関数 $\boldsymbol{T}(\mathrm{P})$ が定まるとき，それらは2変数の関数

$$f(\mathrm{P})=f(u, v), \qquad \boldsymbol{T}(\mathrm{P})=\boldsymbol{T}(u, v)$$

として表される．これを曲面 S 上の**スカラー場**または**テンソル場**という．上記の $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$, $\boldsymbol{n}$ は曲面 S 上のベクトル場である．

媒介変数 u, v がさらに1つの媒介変数 t の関数であれば，位置ベクトル

（4）
$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u(t), v(t))$$

の点は t が変化するとき曲面 S 上の1つの曲線 C をえがく．1点 P における C の接線ベクトルは

（5）
$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{du}{dt}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}+\frac{dv}{dt}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}=\frac{du}{dt}\boldsymbol{r}_u+\frac{dv}{dt}\boldsymbol{r}_v$$

である．ゆえに，曲面 S 上の点 P を通る任意の曲線の接線は，P における曲面の接平面上にあるということができる．

いま

（6）
$$\begin{aligned}
g_{uu}&=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u=\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x_3}{\partial u}\right)^2\\
g_{uv}&=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v=\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}+\frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v}+\frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v}\\
g_{vv}&=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v=\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial x_3}{\partial v}\right)^2
\end{aligned}$$

とおく．これらは一般に変数 (u, v) の関数であり，曲面 S の**基本量**と呼ばれる．古典的には記号

$$g_{uu}=E, \qquad g_{uv}=g_{vu}=F, \qquad g_{vv}=G$$

で表されることが多い．

方程式（4）の曲線 C に対して

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|^2=\left|\frac{du}{dt}\boldsymbol{r}_u+\frac{dv}{dt}\boldsymbol{r}_v\right|^2$$
$$=\left(\frac{du}{dt}\right)^2 g_{uu}+2\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}g_{uv}+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 g_{vv}$$

であるから

定理 3.1 曲面 S 上の曲線 C が式 (4) で与えられるとき，その上の点 P(α) から P(β) までの曲線の弧長 s は

$$(7)\qquad s=\int_\alpha^\beta \sqrt{g_{uu}\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2g_{uv}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+g_{vv}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$$

で与えられる.

式 (6) で定義された基本量 (g_{uu}, g_{uv}, g_{vv}) は点 P とその媒介変数に関係しているが，個々の曲線には無関係な量であることに注意されたい. 空間における線素 (§2, (6)) と同様に

$$(8)\qquad ds=|d\boldsymbol{r}|=\sqrt{g_{uu}du^2+2g_{uv}dudv+g_{vv}dv^2}$$

を曲面 S の**線素**という.

曲面 S の1点 P(u, v) における接線ベクトル $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ によって作られる平行四辺形の面積の平方は，それらのベクトル積の長さの平方であるから，

$$(9)\qquad \begin{aligned}|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|^2&=|\boldsymbol{r}_u|^2|\boldsymbol{r}_v|^2-(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v)^2\\&=g_{uu}g_{vv}-(g_{uv})^2=\begin{vmatrix}g_{uu}&g_{uv}\\g_{vu}&g_{vv}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

に等しい. そして曲面の面積について次の定理が知られている.

定理 3.2 媒介変数 (u, v) が uv 平面の領域 D を動くとき，ベクトル方程式 (1) で表される曲面 S の面積は，それを同じ文字 S で示すとき，重積分

$$(10)\qquad S=\iint_D|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|dudv=\iint_D\sqrt{g_{uu}g_{vv}-(g_{uv})^2}\,dudv$$

で与えられる.

$$dS=|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|dudv=\sqrt{g_{uu}g_{vv}-(g_{uv})^2}\,dudv$$
$$d\boldsymbol{S}=\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\,dudv=\boldsymbol{n}|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|dudv=\boldsymbol{n}dS$$

とおき，それぞれ曲面 S の**面積素**および**ベクトル面積素**という.

例 3.1 半径 r の球面は，空間の極座標 (r, θ, φ) で動径 r を一定にして，方程式

$$\boldsymbol{r}(\theta, \varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)$$

$$(0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$$

で表される．$u=\theta, v=\varphi$ として上に述べてきた諸量を求めよ．

[解] $\boldsymbol{r}_\theta = (r\cos\theta\cos\varphi,\ r\cos\theta\sin\varphi,\ -r\sin\theta)$

$\boldsymbol{r}_\varphi = (-r\sin\theta\sin\varphi,\ r\sin\theta\cos\varphi,\ 0)$

基本量 $g_{\theta\theta} = \boldsymbol{r}_\theta\cdot\boldsymbol{r}_\theta = r^2,\quad g_{\theta\varphi} = \boldsymbol{r}_\theta\cdot\boldsymbol{r}_\varphi = 0,\quad g_{\varphi\varphi} = r^2\sin^2\theta$

線素 $ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2$

$$\boldsymbol{r}_\theta\times\boldsymbol{r}_\varphi = (r^2\sin^2\theta\cos\varphi,\ r^2\sin^2\theta\sin\varphi,\ r^2\sin\theta\cos\theta)$$

$$|\boldsymbol{r}_\theta\times\boldsymbol{r}_\varphi| = \sqrt{g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}-(g_{\theta\varphi})^2} = r^2\sin\theta$$

単位法線ベクトル $\boldsymbol{n} = (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$

これから球面の単位法線ベクトルは $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}/r$ である．

面積素 $dS = r^2\sin\theta d\theta d\varphi$

全面積 $S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} r^2\sin\theta d\theta = r^2\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi}\Big[\varphi\Big]_0^{2\pi}$

$= 4\pi r^2$ ◇

問　　題

1. 次の曲面について，基本量，単位法線ベクトル，面積素および示された部分の面積を求めよ．

(1) $\boldsymbol{r} = (u+v,\ u-v,\ uv)$ $\quad (u^2+v^2 \leqq 1)$

(2) 円錐面 $\boldsymbol{r} = (u\cos v,\ u\sin v,\ cu)$ $\quad \left(c \text{ 定数},\ 0 \leqq u \leqq \dfrac{h}{c},\ 0 \leqq v \leqq 2\pi\right)$

2. 曲面 $S: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ の 1 点 P における単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とし，$\boldsymbol{n}$ を含む平面による S の切り口の曲線を C とする．C の弧長媒介変数を s とし，

$$h_{uu} = \boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial u^2},\qquad h_{uv} = \boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial u\partial v},\qquad h_{vv} = \boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial v^2}$$

とおくとき，曲線 C の点 P における曲率 κ は次の式で与えられることを証明せよ．

$$\kappa = h_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2h_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + h_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

$$= \frac{h_{uu}du^2 + 2h_{uv}dudv + h_{vv}dv^2}{g_{uu}du^2 + 2g_{uv}dudv + g_{vv}dv^2}$$

[解　　答]

1. (1) $\boldsymbol{r}_u = (1,\ 1,\ v),\quad \boldsymbol{r}_v = (1,\ -1,\ u)$

基本量 $g_{uu} = 2+v^2,\quad g_{uv} = uv,\quad g_{vv} = 2+u^2$

線素 $ds^2 = (2+v^2)du^2 + 2uvdudv + (2+u^2)dv^2$

$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=(u+v,\ v-u,\ -2),\qquad |\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|=\sqrt{2(u^2+v^2)+4}$$

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{2(u^2+v^2)+4}}(u+v,\ v-u,\ -2),\qquad dS=\sqrt{2(u^2+v^2)+4}\,dudv$$

$$S=\iint_D\sqrt{2(u^2+v^2)+4}\,dudv=\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{2r^2+4}\,rdrd\theta$$

$$=2\pi\left[\frac{1}{6}(2r^2+4)^{3/2}\right]_0^1=\frac{\pi}{3}(6^{3/2}-8)$$

(2) $\boldsymbol{r}_u=(\cos v,\ \sin v,\ c),\qquad \boldsymbol{r}_v=(-u\sin v,\ u\cos v,\ 0)$

基本量 $g_{uu}=1+c^2,\qquad g_{uv}=0,\qquad g_{vv}=u^2$

線素 $ds^2=(1+c^2)du^2+u^2dv^2$

$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=(-cu\cos v,\ -cu\sin v,\ u),\qquad |\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|=\sqrt{1+c^2}\,u$$

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}(-c\cos v,\ -c\sin v,\ 1),\qquad dS=\sqrt{1+c^2}\,ududv$$

面積 $S=\sqrt{1+c^2}\int_0^{2\pi}dv\int_0^{h/c}udu=\pi\sqrt{1+c^2}\left(\frac{h}{c}\right)^2$

2. 点 P における C の接線ベクトルは $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{r}_u\dfrac{du}{ds}+\boldsymbol{r}_v\dfrac{dv}{ds}$. 主法線ベクトルは切った平面の中にあって $\boldsymbol{t}$ に垂直であるから, $\boldsymbol{n}$ と平行である. ゆえにフルネー・セレーの公式により

$$\kappa\boldsymbol{n}=\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\boldsymbol{r}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\boldsymbol{r}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\boldsymbol{r}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$
$$+\boldsymbol{r}_u\frac{d^2u}{ds^2}+\boldsymbol{r}_v\frac{d^2v}{ds^2}$$

$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_v=0$ であるから, この式と $\boldsymbol{n}$ の内積を求めれば問題の式を導くことができる.

§4. テンソル場

空間全体またはある領域 D の各点 P に対して実数値 $f(\mathrm{P})$ を対応させる関数 f を D で定義された**スカラー場**という. スカラー場は点 P の座標 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ の関数として

$$f(\mathrm{P})=f(x_1,\ x_2,\ x_3)$$

の形で表される. 誤解のおそれのないときには, 簡単に $f(x_i)$ で表す.

領域 D の各点 P に対してベクトル $\boldsymbol{v}(\mathrm{P})$ あるいはテンソル $\boldsymbol{T}(\mathrm{P})$ が定義されているとき, $\boldsymbol{v}$ あるいは $\boldsymbol{T}$ を D で定義された**ベクトル場**あるいは**テンソル場**という. それらは点 P の座標の関数として, 3 変数のテンソル

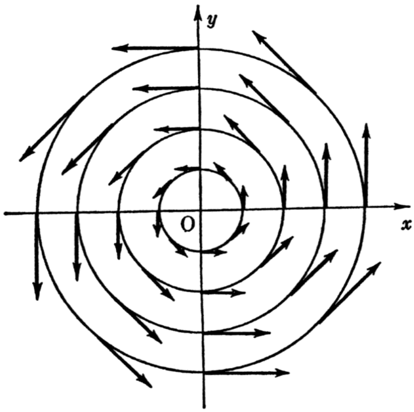
関数

$$\boldsymbol{T}(\mathrm{P})=\boldsymbol{T}(x_1,\ x_2,\ x_3)=\boldsymbol{T}(x_i)$$

で表される．$\boldsymbol{T}$ が2階のテンソルのとき，9個の成分が $x_1,\ x_2,\ x_3$ の関数として

$$\boldsymbol{T}(\mathrm{P})=(T_{ij}(x_1,\ x_2,\ x_3))$$

で表される．



2-6図

スカラー場，ベクトル場，一般にテンソル場の定義域を簡単にそれらの領域ということもある．スカラー場あるいはテンソル場について，2変数の場合と同様に，偏導関数や3重積分等を定義することができる．

ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ が与えられているとき，曲線 C の各点 P における接線ベクトルが $\boldsymbol{v}(\mathrm{P})$ であるような，曲線 C をベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の**流線**という．流線 C を $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ で表すとき，方程式

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{v}(\mathrm{P}(t))$$

が成り立つことである．これを成分を用いて書きくだせば

$$\frac{dx_1}{dt}=v_1(x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t))$$

$$\frac{dx_2}{dt}=v_2(x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t))$$

$$\frac{dx_3}{dt}=v_3(x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t))$$

である．ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ が与えられたとき，これを t の関数 $x_1,\ x_2,\ x_3$ についての常微分方程式と考えれば，ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の流線を決定する方程式である．微分方程式の理論から，$\boldsymbol{v}(\mathrm{P})\neq\boldsymbol{0}$ である点 P の近傍では，各点を1つそしてただ1つの流線が通ることが知られている．$\boldsymbol{v}(\mathrm{P})=\boldsymbol{0}$ である点 P は流線の

特異点であり，その点では流線はいろいろの形状を示すから，特別に吟味しなければならない．2-6 図はベクトル場

$$\boldsymbol{v}(x, y, z)=\left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}, 0\right)$$

の xy 平面上での分布の状態とその流線である円をえがいている．原点 O が特異点になっている．

スカラー場 f に対して，成分が

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)$$

で与えられるベクトル場を f の**勾配**といい，∇f または $\mathrm{grad}\, f$ で示す．記号 ∇ はナブラまたはアトレッドと読む．本書では ∇f の成分を $\nabla_i f$ で，すなわち

（1）
$$\nabla_i f=\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

で示す．

（2）
$$\nabla f=\boldsymbol{e}_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\boldsymbol{e}_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\boldsymbol{e}_3\frac{\partial f}{\partial x_3}$$

であり，記号的に

$$\nabla=\boldsymbol{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\boldsymbol{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\boldsymbol{e}_3\frac{\partial}{\partial x_3}$$

と書き，これを**ハミルトンの微分演算子**という．

点 $\mathrm{P}(x_1, x_2, x_3)$ を通りベクトル $\boldsymbol{l}=(l_1, l_2, l_3)$ を方向ベクトルにもつ直線はベクトル方程式

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{l}t=(x_1+l_1t, x_2+l_2t, x_3+l_3t)$$

で表される．そのとき，スカラー場 f の変数に上の式を代入し，$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{l}t)$ を t について微分すれば

$$\frac{d}{dt}f(x_1+l_1t, x_2+l_2t, x_3+l_3t)$$
$$=l_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+l_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+l_3\frac{\partial f}{\partial x_3}$$

を得る．これを f の点 P における**ベクトル $\boldsymbol{l}$ 方向の微分係数**といい，

$\partial f/\partial \boldsymbol{l}$ で示す．すなわち

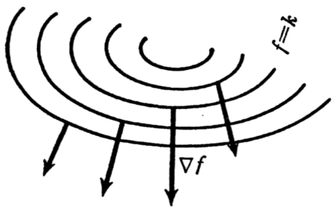
$$(3)\qquad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=l_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+l_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+l_3\frac{\partial f}{\partial x_3}=\boldsymbol{l}\cdot\nabla f$$

であり，これは勾配 ∇f の $\boldsymbol{l}$ 方向の成分にほかならない．

スカラー場 f について，k を定数として方程式

$$(4)\qquad f(x_1,\ x_2,\ x_3)=k$$

を満たす点 $\mathrm{P}(x_1,\ x_2,\ x_3)$ は一般に1つの曲面をえがく．これを f の**等位面**といい，定数 k の値をいろいろ変えれば，異なる等位面が層をなすように生ずる．



2-7図

等位面 (4) が点 P を通るとき，P における接平面の方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_1-x_1)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(X_2-x_2)+\frac{\partial f}{\partial x_3}(X_3-x_3)=0$$

であり，勾配 $\nabla f=(\nabla_i f)$ は等位面の法線ベクトルである．各等位面の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を ∇f と同じ向きに，

$$\frac{\nabla f}{|\nabla f|}=\boldsymbol{n}\qquad \text{すなわち}\qquad \nabla f=|\nabla f|\boldsymbol{n}$$

ととれば，

$$(5)\qquad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}=\boldsymbol{n}\cdot\nabla f=|\nabla f|$$

したがって，関係式

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\boldsymbol{n}$$

が成り立つ．また P における任意の単位ベクトル $\boldsymbol{l}$ が単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ とのなす角を θ とすれば，$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}=\cos\theta$ であるから

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\boldsymbol{l}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\boldsymbol{n}\right)=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\cos\theta$$

が成り立つ．

$\partial f/\partial \boldsymbol{n}$ はスカラー場 f の等位面の法線方向についての増減の変化率であるから，f の増減が激しいほど，いい替えれば f の等位面が密集しているほど，

勾配の長さ $|\nabla f|$ は大きくなる．これが ∇f が勾配ベクトルといわれる理由である．

$\Sigma\{O, e_1, e_2, e_3\}$, $\Sigma'\{O', e'_1, e'_2, e'_3\}$ を直交基底とし，その基本ベクトルの間の直交変換を

$$e_j = e'_i a_{ij}, \qquad e'_i = a_{ij} e_j$$

（$A = (a_{ij})$ は直交行列）で表し，また O の Σ' に関する位置ベクトルを

$$\overrightarrow{O'O} = b_i e'_i$$

とするとき，点の座標 (x_i) と (x'_i) は変換公式

$$(6) \qquad x'_i = a_{ij} x_j + b_i$$

に従う．スカラー場 $f(\mathrm{P})$ は点 P の関数であるから，座標 (x'_i) を代入した関数の x'_i についての微分を $\nabla'_i f$ で表せば

$$(7) \qquad \nabla_j f = \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial x'_k}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x'_k} = a_{kj}\nabla'_k f$$

が導かれる．あるいはこの式に a_{ij} を掛けて j について加えれば

$$(8) \qquad a_{ij}\nabla_j f = a_{ij} a_{kj} \nabla'_k f = \delta_{ik}\nabla'_k f = \nabla'_i f$$

を得る．式 (7), (8) は $(\nabla_i f)$ がベクトルの成分の変換法則に従うことを示している．

勾配の考えを，ベクトル場 $\boldsymbol{a} = (a_j)$，さらにテンソル場 $\boldsymbol{T} = (T_{jk})$ に拡張して，成分が

$$\nabla \boldsymbol{a} = (\nabla_i a_j) = \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\nabla \boldsymbol{T} = (\nabla_i T_{jk}) = \left(\frac{\partial T_{jk}}{\partial x_i}\right)$$

で与えられるテンソル場を $\boldsymbol{a}$ あるいは $\boldsymbol{T}$ の**勾配**または**導関数**という．直交基底の変換のもとで，これらはもとのテンソルより1階高い階数のテンソルになっている．たとえば，ベクトル場 $\boldsymbol{a}$ の勾配は2階のテンソル場

$$\nabla \boldsymbol{a} = (\nabla_i a_j) = \begin{pmatrix} \nabla_1 a_1 & \nabla_1 a_2 & \nabla_1 a_3 \\ \nabla_2 a_1 & \nabla_2 a_2 & \nabla_2 a_3 \\ \nabla_3 a_1 & \nabla_3 a_2 & \nabla_3 a_3 \end{pmatrix}$$

である．

定理4.1 f, g を任意のスカラー場，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ をベクトル場，$\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}$ をテンソル場とするとき，勾配について次の公式が成り立つ．

$$\nabla(f+g)=\nabla f+\nabla g$$
$$\nabla(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\boldsymbol{a}+\nabla\boldsymbol{b}$$
$$\nabla(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T})=\nabla\boldsymbol{S}+\nabla\boldsymbol{T}$$
$$\nabla(fg)=(\nabla f)g+f(\nabla g)$$
$$\nabla(f\boldsymbol{a})=(\nabla f)\otimes\boldsymbol{a}+f\nabla\boldsymbol{a}$$
$$\nabla(f\boldsymbol{T})=(\nabla f)\otimes\boldsymbol{T}+f\nabla\boldsymbol{T}$$
$$\nabla(\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{T})=(\nabla\boldsymbol{S})\otimes\boldsymbol{T}+\boldsymbol{S}\otimes\nabla\boldsymbol{T}$$

これらは成分を用いれば次のように表され，そのまま上記のそれぞれの式の証明になっている．例として $\boldsymbol{S}=(S_{jk})$, $\boldsymbol{T}=(T_{jk})$ とする．

$$\nabla_i(f+g)=\nabla_i f+\nabla_i g$$
$$\nabla_i(a_j+b_j)=\nabla_i a_j+\nabla_i b_j$$
$$\nabla_i(S_{jk}+T_{jk})=\nabla_i S_{jk}+\nabla_i T_{jk}$$
$$\nabla_i(fg)=(\nabla_i f)g+f(\nabla_i g)$$
$$\nabla_i(fa_j)=(\nabla_i f)a_j+f\nabla_i a_j$$
$$\nabla_i(fT_{jk})=(\nabla_i f)T_{jk}+f\nabla_i T_{jk}$$
$$\nabla_i(S_{jk}T_{lm})=(\nabla_i S_{jk})T_{lm}+S_{jk}(\nabla_i T_{lm})$$

スカラー場 f の勾配の勾配は

$$\nabla\nabla f=(\nabla_i\nabla_j f)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)$$

で与えられ，対称のテンソルである．

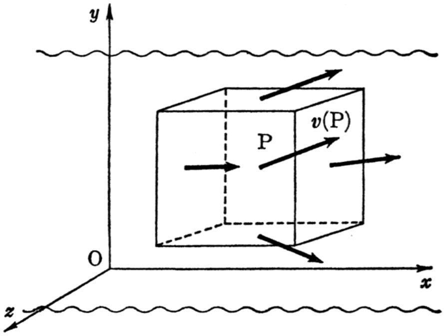
ベクトル場 $\boldsymbol{a}=(a_i)$ またはテンソル場 $\boldsymbol{T}=(T_{ij})$ に対して，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\nabla_1 a_1+\nabla_2 a_2+\nabla_3 a_3=\nabla_i a_i$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{T}=(\nabla_i T_{ij})=(\nabla_1 T_{1j}+\nabla_2 T_{2j}+\nabla_3 T_{3j})$$

で定義される量 $\nabla\cdot\boldsymbol{a}$ または $\nabla\cdot\boldsymbol{T}$ を**発散**といい，上式の左辺の記号または $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$, $\operatorname{div}\boldsymbol{T}$ で示す．$\nabla\cdot\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}$ の勾配 $\nabla\boldsymbol{a}=(\nabla_i a_j)$ のトレースで，スカラーである．また $\nabla\cdot\boldsymbol{T}=(\nabla_i T_{ij})$ はベクトル場である．

流体の各点 $\mathrm{P}(x_i)$ における速度ベクトルを $\boldsymbol{v}(\mathrm{P})$ とするとき，P を中心と

する単位体積から単位時間に流出する流体の容積が $\nabla\cdot\boldsymbol{v}(\mathrm{P})$ で与えられ，これが発散という術語の由来である．



2-8図

定理4.2 定理 4.1 と同じ記号を用いて，発散について次の公式が成り立つ．

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\cdot\boldsymbol{a}+\nabla\cdot\boldsymbol{b}$$
$$\nabla\cdot(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T})=\nabla\cdot\boldsymbol{S}+\nabla\cdot\boldsymbol{T}$$
$$\nabla\cdot(f\boldsymbol{a})=(\nabla f)\cdot\boldsymbol{a}+f\nabla\cdot\boldsymbol{a}$$
$$\nabla\cdot(f\boldsymbol{T})=(\nabla f)\cdot\boldsymbol{T}+f\nabla\cdot\boldsymbol{T}$$

これらを成分で表すには，定理 4.1 の各式で i と j について縮約すればよい．すなわち

$$\nabla_i(a_i+b_i)=\nabla_i a_i+\nabla_i b_i$$
$$\nabla_i(T_{ik}+S_{ik})=\nabla_i T_{ik}+\nabla_i S_{ik}$$
$$\nabla_i(fa_i)=(\nabla_i f)a_i+f\nabla_i a_i$$
$$\nabla_i(fT_{ik})=(\nabla_i f)T_{ik}+f\nabla_i T_{ik}$$

ベクトル場 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ に対して，成分が

$$(\nabla_i a_j-\nabla_j a_i)=\begin{pmatrix} 0 & \nabla_1 a_2-\nabla_2 a_1 & \nabla_1 a_3-\nabla_3 a_1 \\ \nabla_2 a_1-\nabla_1 a_2 & 0 & \nabla_2 a_3-\nabla_3 a_2 \\ \nabla_3 a_1-\nabla_1 a_3 & \nabla_3 a_2-\nabla_2 a_3 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられる交代テンソルを，$\boldsymbol{a}$ の**回転テンソル**という．それに付随するベクトルを $\boldsymbol{a}$ の**回転ベクトル**または単に**回転**といい，記号 $\nabla\times\boldsymbol{a}$ または $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$, $\mathrm{curl}\,\boldsymbol{a}$ などで表す．$\nabla\times\boldsymbol{a}$ の成分は

$$(\nabla\times\boldsymbol{a})_i=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(\nabla_j a_k-\nabla_k a_j)=\varepsilon_{ijk}\nabla_j a_k$$

であるから，

$$(\nabla_2 a_3-\nabla_3 a_2,\ \nabla_3 a_1-\nabla_1 a_3,\ \nabla_1 a_2-\nabla_2 a_1)$$

で与えられる．

$\boldsymbol{a}$ の回転テンソルを同じく $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$ で表し，その成分を $(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})_{ij}$ で示す．

さらに2階の交代テンソル $\boldsymbol{T}=(T_{ij})$ に対して，

$$\nabla_i T_{jk}+\nabla_j T_{ki}+\nabla_k T_{ij}$$

で定義される3階の交代テンソルを $\boldsymbol{T}$ の**回転**といい，rot $\boldsymbol{T}$ で表す．

スカラー場 f，ベクトル場 $\boldsymbol{a}$，またはテンソル場 $\boldsymbol{T}$ に対して，それぞれの勾配の発散

$$\nabla\cdot\nabla f,\qquad \nabla\cdot\nabla\boldsymbol{a},\qquad \nabla\cdot\nabla\boldsymbol{T}$$

はスカラー場，ベクトル場，$\boldsymbol{T}$ と同じ階数のテンソル場であり，記号 Δf, $\Delta\boldsymbol{a}$, $\Delta\boldsymbol{T}$ で表される．Δ を**ラプラシアン**という．その成分は

$$\Delta f=\nabla_i\nabla_i f=\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial {x_3}^2}$$

$$\Delta a_j=\nabla_i\nabla_i a_j=\frac{\partial^2 a_j}{\partial {x_1}^2}+\frac{\partial^2 a_j}{\partial {x_2}^2}+\frac{\partial^2 a_j}{\partial {x_3}^2}$$

$$\Delta T_{jk}=\nabla_i\nabla_i T_{jk}=\frac{\partial^2 T_{jk}}{\partial {x_1}^2}+\frac{\partial^2 T_{jk}}{\partial {x_2}^2}+\frac{\partial^2 T_{jk}}{\partial {x_3}^2}$$

で与えられる．

定理4.3 ベクトルの回転について次の公式が成り立つ．

$$\nabla\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\times\boldsymbol{a}+\nabla\times\boldsymbol{b}$$

$$\nabla\times(f\boldsymbol{a})=(\nabla f)\times\boldsymbol{a}+f(\nabla\times\boldsymbol{a})$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b})$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a})$$

$$\nabla\times(\nabla f)=\boldsymbol{0}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\Delta\boldsymbol{a}$$

これらの式を成分で表せば，次の式のようになり，これらは右辺の式の意味を表している．

$$\varepsilon_{ijk}\nabla_j(a_k+b_k)=\varepsilon_{ijk}\nabla_j a_k+\varepsilon_{ijk}\nabla_j b_k$$

$$\varepsilon_{ijk}\nabla_j(fa_k)=\varepsilon_{ijk}(\nabla_j f)a_k+\varepsilon_{ijk}f\nabla_j a_k$$

$$\begin{aligned}\nabla_i(\varepsilon_{ijk}a_jb_k)&=\varepsilon_{ijk}(\nabla_i a_j)b_k+\varepsilon_{ijk}a_j\nabla_i b_k\\&=(\varepsilon_{ijk}\nabla_i a_j)b_k-a_i(\varepsilon_{ijk}\nabla_j b_k)\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{ijk}\nabla_j(\varepsilon_{klm}a_lb_m)=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}(\nabla_j a_lb_m)$$

$$= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\{(\nabla_j a_l)b_m + a_l(\nabla_j b_m)\}$$
$$= b_j\nabla_j a_i + a_i\nabla_j b_j - b_i\nabla_j a_j - a_j\nabla_j b_i$$

$\varepsilon_{ijk}\nabla_j\nabla_k f$ は交代テンソル ε_{ijk} と対称テンソル $\nabla_j\nabla_k f$ を縮合したものであるから0である.

$$\nabla_i(\varepsilon_{ijk}\nabla_j a_k) = \varepsilon_{ijk}\nabla_i\nabla_j a_k = 0$$
$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\nabla_j(\varepsilon_{klm}\nabla_l a_m) &= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\nabla_j\nabla_l a_m \\ &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\nabla_j\nabla_l a_m \\ &= \nabla_j\nabla_i a_j - \nabla_j\nabla_j a_i \\ &= \nabla_i\nabla_j a_j - \Delta a_i\end{aligned}$$

定理 4.4 点 $\mathrm{P}(x_i)$ の位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x_i)$ に対して

$$\nabla\boldsymbol{r} = \boldsymbol{I}, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{r} = 3, \qquad \nabla\times\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$$

[証 明] $\nabla_i x_j = \dfrac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}$ であるから,

$$\nabla\boldsymbol{r} = (\nabla_i x_j) = (\delta_{ij}) = \boldsymbol{I}$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{r} = \nabla_i x_i = \delta_{ii} = 3$$
$$\nabla_i x_j - \nabla_j x_i = \delta_{ij} - \delta_{ij} = 0$$

◇

直交座標系 (x_i) に関して空間の体積素 dV は

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3$$

で与えられる. スカラー場 f が空間のある立体の領域 V で定義されているとき, 3重積分

$$\tilde{f} = \iiint_V f(x_1, x_2, x_3)dV$$

を領域 V における f の **体積分** という. 同様に, ベクトル場 $\boldsymbol{a} = (a_i)$ あるいはテンソル場 $\boldsymbol{T} = (T_{ij})$ が領域 V で定義されているとき, それらの成分の体積分

$$\tilde{a}_i = \iiint_V a_i dV, \qquad \tilde{T}_{ij} = \iiint_V T_{ij} dV$$

は, 定理 1.5 と同様に, ベクトル $\tilde{\boldsymbol{a}}$ あるいはテンソル $\tilde{\boldsymbol{T}}$ を構成する. これらを $\boldsymbol{a}$ あるいは $\boldsymbol{T}$ の **体積分** という.

$\boldsymbol{a} = (a_i)$ が定ベクトルならば

$$\iiint_V T_{ij}a_j dV = \left(\iiint_V T_{ij}dV\right)a_j$$

であるから,

定理4.5 領域 V で定義されたテンソル場 $\boldsymbol{T}$ の体積分を $\tilde{\boldsymbol{T}}$ とし, $\boldsymbol{T}$ および $\tilde{\boldsymbol{T}}$ が定める線形変換をそれぞれ T および $\tilde{T}$ とするとき, 定ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して, ベクトル場 $T(\boldsymbol{a})$ の体積分は

$$\iiint_V T(\boldsymbol{a})dV = \tilde{T}(\boldsymbol{a})$$

で与えられる.

例4.1 剛体の慣性テンソル 剛体 V を質点の分布と考え, 各質点の密度を $\rho(\mathrm{P})$, 剛体に固定された回転座標系 $\Sigma^*(t)$ に関する体積素を $dV = dx^*_1 dx^*_2 dx^*_3$ とすれば, dV は時間 t には無関係である. 剛体全体の角運動量ベクトル $\tilde{\boldsymbol{h}}$ は

$$\tilde{\boldsymbol{h}} = \iiint_V \boldsymbol{h}(\mathrm{P})dV = \iiint_V \{\boldsymbol{J}(\mathrm{P})(\boldsymbol{\omega})\}dV$$

で定義される. 成分で表せば

$$\tilde{h}_i = \iiint_V J_{ij}(\mathrm{P})\omega_j dV = \iiint_V \rho(\mathrm{P})\{(x^*_k x^*_k)\delta_{ij} - x^*_i x^*_j\}\omega_j dV$$

であり, 角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は剛体の各点には無関係であるから,

$$\tilde{h}_i = \left(\iiint_V J_{ij}(\mathrm{P})dV\right)\omega_j$$

である.

$$\tilde{J}_{ij} = \iiint \rho\{(x^*_k x^*_k)\delta_{ij} - x^*_i x^*_j\}dV$$

すなわち

$$\tilde{\boldsymbol{J}} = \iiint_V \boldsymbol{J}(\mathrm{P})dV$$

とおき, $\tilde{\boldsymbol{J}}$ が表す線形変換を $\tilde{J}$ で示せば,

$$\tilde{\boldsymbol{h}} = \tilde{J}(\boldsymbol{\omega}); \qquad \tilde{h}_i = \tilde{J}_{ij}\omega_j$$

である. このテンソル $\tilde{\boldsymbol{J}} = (\tilde{J}_{ij})$ を剛体 V の**慣性テンソル**という.

問　題

1. 次の曲面の点 P(1, 1, 1) における単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$, 接平面の方程式, 関数 $\varphi = xyz$ の法線方向の微分係数を求めよ.

（1） 回転放物面 $x^2+y^2-z=1$

（2） $x^2y+y^2x+z^2y=3$

2. 点 $\mathrm{P}(x_i)$ の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とし，$r=|\boldsymbol{r}|$ とするとき，次の量を求めよ．$f(r)$ は r の微分可能な関数，$\boldsymbol{v}$ はベクトル場とする．

（1） ∇r （2） $\nabla \log r$ （3） $\nabla f(r)$

（4） $\boldsymbol{v}\cdot(\nabla \boldsymbol{r})$ （5） $\nabla\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ （6） $\nabla\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$

（7） $\nabla\times(f(r)\boldsymbol{r})$ （8） Δr （9） $\Delta\dfrac{1}{r}$

3. ベクトル場 $\boldsymbol{a}=(x\sin z,\ y\cos z,\ xy)$ の発散と回転を求めよ．

4. 例 4.1 に従って，剛体全体の角運動量テンソル $\tilde{\boldsymbol{H}}$ と 4 階の慣性テンソル $\tilde{J}_{ijkl}$ を定義し，その間の関係を述べよ．

[解　　答]

1. （1） $f=x^2+y^2-z$ とおけば

$$\nabla f=(2x,\ 2y,\ -1),\qquad (\nabla f)_{\mathrm{P}}=(2,\ 2,\ -1),\qquad |\nabla f|_{\mathrm{P}}=3$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{n}=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$$

接平面の方程式は $2(x-1)+2(y-1)-(z-1)=0$

すなわち $2x+2y-z=3$

$$\nabla\varphi=(yz,\ zx,\ xy),\qquad (\nabla\varphi)_{\mathrm{P}}=(1,\ 1,\ 1)$$

$$\therefore\quad (\boldsymbol{n}\cdot\nabla\varphi)_{\mathrm{P}}=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=1$$

（2） $f=x^2y+y^2x+z^2y$ とおく．

$$\nabla f=(2xy+y^2,\ x^2+2xy+z^2,\ 2yz),\qquad (\nabla f)_{\mathrm{P}}=(3,\ 4,\ 2),\qquad |\nabla f|_{\mathrm{P}}=\sqrt{29}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{29}}(3,\ 4,\ 2)$$

接平面の方程式は $3(x-1)+4(y-1)+2(z-1)=0$

すなわち $3x+4y+2z=9$

$\nabla\varphi$ は (1) と同じ．

$$\therefore\quad (\boldsymbol{n}\cdot\nabla\varphi)_{\mathrm{P}}=\frac{1}{\sqrt{29}}(3+4+2)=\frac{9}{\sqrt{29}}$$

2. $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ （1） $\nabla_i r=\dfrac{x_i}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}=\dfrac{x_i}{r}$, $\nabla r=\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$

（2） $\nabla\log r=\dfrac{1}{r}\nabla r=\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^2}$ （3） $\nabla f(r)=\dfrac{df}{dr}\nabla r=\left(\dfrac{df}{dr}\right)\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$

（4） $\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\boldsymbol{r})=(v_i\nabla_i x_j)=(v_i\delta_{ij})=(v_j)=\boldsymbol{v}$

(5) $\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\frac{1}{r}\nabla\cdot\boldsymbol{r}-\frac{1}{r^2}(\nabla r)\cdot\boldsymbol{r}=\frac{3}{r}-\frac{1}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\boldsymbol{r}=\frac{3}{r}-\frac{1}{r}=\frac{2}{r}$

(6) (5) と同様に $\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=\frac{3}{r^3}-\frac{3}{r^4}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\boldsymbol{r}=0$

(7) (3) と定理 4.4 により $\nabla\times(f\boldsymbol{r})=(\nabla f)\times\boldsymbol{r}+f\nabla\times\boldsymbol{r}=\left(\frac{df}{dr}\right)\frac{\boldsymbol{r}}{r}\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$

(8) $\Delta r=\nabla\cdot\nabla r=\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=\frac{2}{r}$ [(5) による]

(9) $\Delta\frac{1}{r}=\nabla\cdot\left(\nabla\frac{1}{r}\right)=-\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=0$ [(6) による]

3.

$$\nabla\boldsymbol{a}=(\nabla_i a_j)=\begin{pmatrix}\sin z & 0 & y\\ 0 & \cos z & x\\ x\cos z & -y\sin z & 0\end{pmatrix}$$

$\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\nabla_i a_i=\sin z+\cos z,\qquad \nabla\times\boldsymbol{a}=(x+y\sin z,\ x\cos z-y,\ 0)$

4. $\tilde{\boldsymbol{H}}=(\tilde{H}_{ij})$ の成分および $\tilde{J}_{ijkl}$ は

$$\tilde{H}_{ij}=\iiint_V\rho(\Omega_{ik}x^*{}_k x^*{}_j-\Omega_{jk}x^*{}_k x^*{}_i)dV$$

$$\tilde{J}_{ijkl}=\iiint_V\rho(\delta_{ik}x^*{}_j x^*{}_l-\delta_{jk}x^*{}_i x^*{}_l)dV$$

で与えられる．$J_{ijkl}\Omega_{kl}=H_{ij}$ であり，Ω_{kl} は剛体のすべての点に対して一定であるから，

$$\tilde{J}_{ijkl}\Omega_{kl}=\tilde{H}_{ij}$$

§5. 線積分

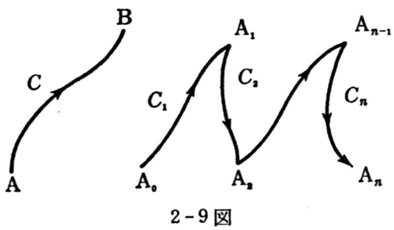
曲線 C が直交座標系 (x_i) において弧長媒介変数 s を用いて

$$x_i=x_i(s)\qquad(a\leqq s\leqq b)$$

で表され，$\mathrm{P}(a)=\mathrm{A}$, $\mathrm{P}(b)=\mathrm{B}$ であるとき，C を点 A から B への**有向曲線**といい，$C=\widehat{\mathrm{AB}}$ で表そう．A を C の**始点**，B を**終点**といい，記号的に

$$\partial C=\mathrm{B}-\mathrm{A}$$

と書いて，これを有向曲線 C の**境界**という．



2-9 図

いくつかの有向曲線 $C_1=\widehat{\mathrm{A_0A_1}}$, $C_2=\widehat{\mathrm{A_1A_2}}$, $\cdots$, $C_n=\widehat{\mathrm{A_{n-1}A_n}}$ があるとき，それらをつないで得られる曲線 C を形式的に

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

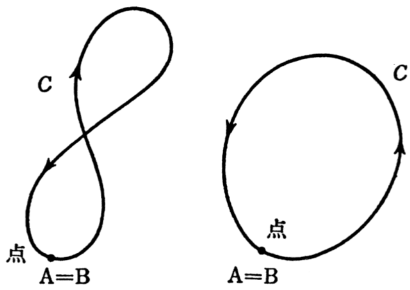
と書くことにする．

$$\partial C_1 = \mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_0,\quad \partial C_2 = \mathrm{A}_2 - \mathrm{A}_1,\quad \cdots,\quad \partial C_n = \mathrm{A}_n - \mathrm{A}_{n-1}$$

であるから，点についても形式的に加法，減法を考えることにすれば，

$$\partial C = \partial C_1 + \partial C_2 + \cdots + \partial C_n = \mathrm{A}_n - \mathrm{A}_0$$

である．$\partial C = 0$，すなわち始点と終点が一致する曲線を**閉曲線**という．閉曲線がそれ自身と一度も交わらないとき，**単一閉曲線**という．



2-10 図

曲線 $C:\mathrm{P}(s)$ $(a \leqq s \leqq b)$ に対して，$s' = a + b - s$ とおくとき，s' を媒介変数として $\mathrm{P}(s')$ $(a \leqq s' \leqq b)$ で表される曲線は始点 $\mathrm{P}(a) = \mathrm{B}$，終点 $\mathrm{P}(b) = \mathrm{A}$ となり，s' は B から A の向きに測った弧長媒介変数になる．この曲線を C の**逆向き**の有向曲線といい，$-C$ で表す．そのとき，上の形式的な点の加減に従えば

$$\partial(-C) = \mathrm{A} - \mathrm{B} = -\partial C$$

と書くことができる．

曲線 C をいくつかの部分 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ に分け，各部分が微分可能曲線であるとき，曲線 C は**弧状微分可能曲線**であるという．以下に取り扱う曲線はすべてこのような曲線であるとする．

スカラー場 $f(s)$ が曲線 $C\,(a \leqq s \leqq b)$ に沿って定義されているとき，定積分

$$\int_a^b f(s)ds$$

を $f(s)$ の曲線 C に沿っての**線積分**という．$C = \widehat{\mathrm{AB}}$ であるとき，この線積分は記号

$$\int_C f(s)ds,\qquad \int_{\widehat{\mathrm{AB}}} f(s)ds$$

などで表される．また C が閉曲線であるときには，記号

$$\oint_C f(s)ds$$

で示されることもある．

スカラー場 f が空間のある領域 D で定義されているとき，D 内の曲線 C: $x_i = x_i(s)$ $(a \leqq s \leqq b)$ に沿っての f の線積分は

$$\int_C f ds = \int_a^b f(x_1(s),\ x_2(s),\ x_3(s))ds$$

で与えられる．また曲線が一般の媒介変数 t によって

$$x_i = x_i(t) \qquad (\alpha \leqq t \leqq \beta)$$

で表されているときは，線積分は

$$\int_C f ds = \int_\alpha^\beta f(x_i(t))\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2}\,dt$$

で与えられる．

ベクトル場 $\boldsymbol{v} = (v_i)$ が領域 D で定義されているとする．領域 D 内の曲線 C の単位接線ベクトル $\boldsymbol{t}(s) = \left(\dfrac{dx_i}{ds}\right)$ と $\boldsymbol{v}(x(s)) = \boldsymbol{v}(x_i(s))$ との内積

$$\boldsymbol{v}(x(s))\cdot\boldsymbol{t}(s) = v_i \frac{dx_i}{ds}$$

は曲線 C に沿うスカラー場になる．そのスカラー場の曲線 C に沿っての線積分

$$\int_C \boldsymbol{v}(x(s))\cdot\boldsymbol{t}(s)ds = \int_a^b v_i \frac{dx_i}{ds}\,ds$$
$$= \int_a^b \left(v_1 \frac{dx_1}{ds} + v_2 \frac{dx_2}{ds} + v_3 \frac{dx_3}{ds}\right)ds$$

を曲線 C に沿っての**ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の線積分**という．任意の媒介変数 t $(\alpha \leqq t \leqq \beta)$ に対して，上の式の右辺は

$$\int_\alpha^\beta v_i \frac{dx_i}{dt}\,dt = \int_C v_i dx_i$$

であるから，この線積分を簡単に

$$\int_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}$$

と書くことができる．

$\boldsymbol{f}(s)$ が曲線 $C=\widehat{\mathrm{AB}}$ に沿って運動する質点に作用する力を表すベクトル場であるとき，その線積分

$$\int_C \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{t}ds=\int_C f_i dx_i$$

を力 $\boldsymbol{f}$ の行った**仕事**という．

$\boldsymbol{v}$ として，スカラー場 f の勾配ベクトル

$$\nabla f=(\nabla_i f)$$

をとるとき，

$$\int_C(\nabla f)\cdot\boldsymbol{t}ds=\int_a^b(\nabla_i f)\frac{dx_i}{ds}ds=\int_a^b\frac{df}{ds}ds$$
$$=f(b)-f(a)$$

であるから

定理 5.1　スカラー場 f の定義域 D の中で，2点 A, B を結ぶ任意の曲線 $C=\widehat{\mathrm{AB}}$ に沿って

$$\int_C(\nabla f)\cdot\boldsymbol{t}ds=f(\mathrm{B})-f(\mathrm{A})$$

である．とくに閉曲線 C に対しては

（1）
$$\oint_C(\nabla f)\cdot\boldsymbol{t}ds=0$$

である．

勾配ベクトル $\boldsymbol{v}=\nabla f$ の回転は $\boldsymbol{0}$ である，すなわち

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=\nabla\times(\nabla f)=\boldsymbol{0}$$

であることは，すでに定理 4.3 で見てきた．逆に，領域 D で定義されたベクトル $\boldsymbol{v}$ の回転が $\boldsymbol{0}$,

（2）
$$\nabla\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0};\qquad \nabla_i v_j=\nabla_j v_i$$

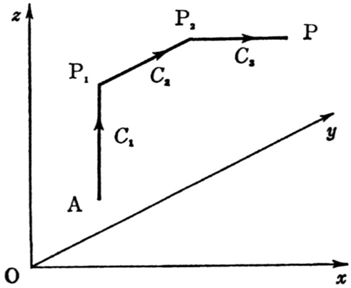
であるとき，D の各点の近くで

（3）
$$\nabla f=\boldsymbol{v}$$

であるようなスカラー場 f が存在することを証明しよう．式 (2) の性質をもつ

ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ は**渦なし**，または**層状**であるという．ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して，$\boldsymbol{v}=-\nabla f$ であるようなスカラー場を**スカラー・ポテンシャル**または単に**ポテンシャル**という．

直交座標をいま (x, y, z) で示し，D 内の1点 $\mathrm{A}(x_0, y_0, z_0)$ を定め，任意の点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ に対して次のような線分をとる．



2-11図

$$C_1=\mathrm{AP}_1:\quad x=x_0,\ y=y_0,\ z=t\quad (z_0\leqq t\leqq z)$$

$$C_2=\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2:\quad x=x_0,\ y=t,\ z=z\quad (y_0\leqq t\leqq y)$$

$$C_3=\mathrm{P}_2\mathrm{P}:\quad x=t,\ y=y,\ z=z\quad (x_0\leqq t\leqq x)$$

それぞれの線分上で

$$d\boldsymbol{r}=(0, 0, dt),\qquad d\boldsymbol{r}=(0, dt, 0),\qquad d\boldsymbol{r}=(dt, 0, 0)$$

である．これらの線分をつないで得られる折線 $C=C_1+C_2+C_3$ に沿うベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の線積分を

$$f(x, y, z)=\int_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}$$

とおけば，各線分上での線積分に分けて

$$\begin{aligned} f(x, y, z)&=\left(\int_{C_3}+\int_{C_2}+\int_{C_1}\right)\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} \\ &=\int_{x_0}^{x} v_1(t, y, z)dt+\int_{y_0}^{y} v_2(x_0, t, z)dt+\int_{z_0}^{z} v_3(x_0, y_0, t)dt \end{aligned} \tag{4}$$

となる．そのとき $\nabla f=\boldsymbol{v}$ であることを証明しよう．点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ に対して，式 (4) の最終の式で x に従属する項は第1項だけであるから，

$$\nabla_1 f=\frac{\partial f}{\partial x}=v_1(x, y, z)$$

次に，$\nabla_1 v_2=\nabla_2 v_1$ であることに注意して

$$\nabla_2 f=\frac{\partial f}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial v_1(t, y, z)}{\partial y}dt+v_2(x_0, y, z)$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial v_2(t, y, z)}{\partial t} dt + v_2(x_0, y, z)$$

$$= \Big[v_2(t, y, z) \Big]_{x_0}^{x} + v_2(x_0, y, z)$$

$$= v_2(x, y, z)$$

さらに，$\nabla_1 v_3 = \nabla_3 v_1$, $\nabla_2 v_3 = \nabla_3 v_2$ であることに注意して，

$$\nabla_3 f = \frac{\partial f}{\partial z} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial v_1(t, y, z)}{\partial z} dt + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial v_2(x_0, t, z)}{\partial z} dt + v_3(x_0, y_0, z)$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial v_3(t, y, z)}{\partial t} dt + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial v_3(x_0, t, z)}{\partial t} dt + v_3(x_0, y_0, z)$$

$$= \Big[v_3(t, y, z) \Big]_{x_0}^{x} + \Big[v_3(x_0, t, z) \Big]_{y_0}^{y} + v_3(x_0, y_0, z)$$

$$= v_3(x, y, z)$$

を得る．ゆえに

定理 5.2 ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ が勾配ベクトルであるための必要十分条件は，$\boldsymbol{v}$ が渦なしであることである．

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}; \qquad \nabla_i v_j = \nabla_j v_i$$

式 (4) は渦なしベクトル場 $\boldsymbol{v} = (v_i)$ に対して，スカラー場 f を作る方法である．不定積分で積分の上端をそのまま積分の変数に用いるように，t を x, y, z で書いてよい．点 A は任意であるから，f に定数を加えたものも解である．

2 点 A, P を領域 D の中で先の C_1, C_2, C_3 のような線分をつないだ折線では結べないときには，いくつかの折線をつないでもよいし，一般に D 内の曲線に沿っての線積分を用いてよい．しかし，いろいろの曲線に沿って線積分して得られる関数の点 P における値が一意的に定まるとは限らない．一意的に定まるための条件については定理 6.6 で述べる．

例 5.1 ベクトル場

$$\boldsymbol{v} = (y + \sin z,\ x,\ x \cos z)$$

が渦なしであることを示し，$\nabla f = \boldsymbol{v}$ であるようなスカラー場 f を求めよ．

［解］ $\boldsymbol{v}$ の勾配 $\nabla\boldsymbol{v}$ は2階のテンソル

$$\nabla\boldsymbol{v}=(\nabla_i v_j)=\begin{pmatrix}0 & 1 & \cos z\\ 1 & 0 & 0\\ \cos z & 0 & -x\sin z\end{pmatrix}$$

であり，これは対称であるから $\nabla_i v_j-\nabla_j v_i=0$ である．

点 A として原点 O(0, 0, 0) をとれば，式 (4) は

$$f(x,y,z)=\int_0^x(y+\sin z)dx+\int_0^y 0\,dy+\int_0^z 0\cos z\,dz$$
$$=x(y+\sin z)$$

積分路として

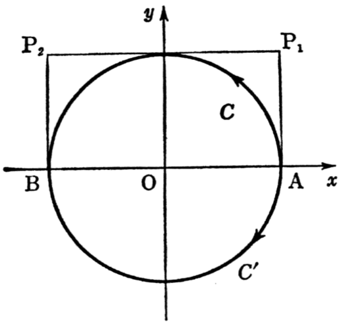
$$C_1=\mathrm{OP}_1:\quad x=t,\ y=0,\ z=0\qquad(0\leqq t\leqq x)$$
$$C_2=\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2:\quad x=x,\ y=t,\ z=0\qquad(0\leqq t\leqq y)$$
$$C_3=\mathrm{P}_2\mathrm{P}:\quad x=x,\ y=y,\ z=t\qquad(0\leqq t\leqq z)$$

をつないだ折線 $C=C_1+C_2+C_3$ をとれば

$$f(x,y,z)=\int_0^x(0+0)dx+\int_0^y x\,dy+\int_0^z x\cos z\,dz$$
$$=xy+x\sin z$$

となり，前半の解と一致する． ◇

例 5.2 ベクトル場 $\boldsymbol{v}=\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2},\ \dfrac{x}{x^2+y^2},\ 0\right)$ を点 A(1, 0, 0) から B(−1, 0, 0) まで xy 平面上の左の図で示される単位円の上半分 C，下半分 C' および A(1, 0)，P_1(1, 1)，P_2(−1, 1)，B(−1, 0) を結ぶ折線 C'' に沿って線積分し，B における値を比較せよ．



2-12 図

［解］

$$(\nabla_i v_j)=\begin{pmatrix}\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & 0\\ \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

でこれは対称であるから，ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ は渦なしである．xy 平面上の単位円は弧長媒介変数 s によりベクトル方程式

$$\boldsymbol{r}=(\cos s,\ \sin s,\ 0)$$

で表され，

$$d\boldsymbol{r}=(-\sin s,\ \cos s,\ 0)ds$$

である．またベクトル場 $\boldsymbol{v}$ は単位円周上では

$$\boldsymbol{v}=(-\sin s,\ \cos s,\ 0)$$

である．そのとき

$$\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}=(\sin^2 s+\cos^2 s)ds=ds$$

であるから，C および C' 上での線積分はそれぞれ

$$\int_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_0^{\pi} ds=\pi,\qquad \int_{C'} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_0^{-\pi} ds=-\pi$$

一方，AP_1 上では $x=1$，P_1P_2 上では $y=1$，P_2B 上では $x=-1$ として

$$\begin{aligned}\int_{C''} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}&=\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,dy+\int_1^{-1}\frac{-1}{x^2+1}\,dx+\int_1^0\frac{-1}{1+y^2}\,dy\\&=\int_0^1\frac{dy}{y^2+1}+\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2+1}+\int_0^1\frac{dy}{y^2+1}\\&=4\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}=4\Big[\tan^{-1}x\Big]_0^1=\pi\end{aligned}$$

である．C と C'' に沿っての線積分の B における値は等しいが，C と C' に沿っての値は 2π だけ差がある．

$f=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ とするとき，原点以外では $\nabla f=\boldsymbol{v}$ であるが，f は原点では定義されなくて，積分路が xy 平面の単位円周上を正の向きに1回回転するごとに 2π だけ増加する．

◇

ベクトル $\boldsymbol{v}$ の回転 $\boldsymbol{w}=\nabla\times\boldsymbol{v}$ すなわち

（5）
$$w_i=\varepsilon_{ijk}\nabla_j v_k$$

（6）
$$\begin{cases}w_1=\nabla_2 v_3-\nabla_3 v_2\\ w_2=\nabla_3 v_1-\nabla_1 v_3\\ w_3=\nabla_1 v_2-\nabla_2 v_1\end{cases}$$

に対しては，定理 4.3 の第6式により

（7）
$$\nabla\cdot\boldsymbol{w}=\nabla_i w_i=0$$

である．逆に $\nabla\cdot\boldsymbol{w}=0$ であるとき，$\boldsymbol{w}=\nabla\times\boldsymbol{v}$ であるようなベクトル場 $\boldsymbol{v}$ が存在することを証明しよう．f をスカラー場とすれば，$\nabla\times(\nabla f)=\boldsymbol{0}$ であるから

$$\nabla\times(\boldsymbol{v}+\nabla f)=\nabla\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}$$

であり，$\boldsymbol{w}$ に対して $\boldsymbol{v}$ は一意的には定まらない．一般に式 (7) の性質をもつベクトル場 $\boldsymbol{w}$ を**湧き出しなし**，**回転的**あるいは**管状**であるという．$\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{w}$ の**ベクトル・ポテンシャル**という．

いま w_i が与えられたとき，式 (6) を満たす v_i を見出すことが問題である．

まず，$v_3=0$ であるような解が存在すると仮定すれば，式 (6) は

$$(8)\qquad w_1=-\frac{\partial v_2}{\partial z},\qquad w_2=\frac{\partial v_1}{\partial z},\qquad w_3=\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}$$

となる．第1，第2式から，x, y だけに従属する関数 u_1, u_2 を用いて

$$(9)\qquad \begin{aligned} v_1&=\int_{z_0}^{z} w_2 dz+u_1(x,y)\\ v_2&=-\int_{z_0}^{z} w_1 dz+u_2(x,y)\end{aligned}$$

と表される．仮定により $\nabla\cdot\boldsymbol{w}=\nabla_i w_i=0$, すなわち

$$\frac{\partial w_3}{\partial z}=-\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}+\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)$$

であるから，式 (9) を微分して

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}&=-\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}+\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)dz+\frac{\partial u_2}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial y}\\ &=\int_{z_0}^{z}\frac{\partial w_3}{\partial z}dz+\frac{\partial u_2}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial y}\\ &=w_3(x,y,z)-w_3(x,y,z_0)+\frac{\partial u_2}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial y}\end{aligned}$$

ゆえに，u_1, u_2 として

$$(10)\qquad u_1(x,y)=-\int_{y_0}^{y} w_3(x,y,z_0)dy,\qquad u_2=0$$

と選べば，式 (9) で与えられる v_1, v_2 は (8) の第3式を満たす．これらを式 (9) に代入すれば

$$(11)\qquad \boldsymbol{v}=\left(\int_{z_0}^{z} w_2 dz+u_1(x,y),\ -\int_{z_0}^{z} w_1 dz,\ 0\right)$$

で与えられるベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{w}$ のベクトル・ポテンシャルである．これに任意の勾配ベクトルを加えてもよい．ゆえに

定理 5.3　ベクトル $\boldsymbol{w}$ があるベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の回転である，すなわち $\boldsymbol{w}=\nabla\times\boldsymbol{v}$ であるための必要十分条件は，$\boldsymbol{w}$ が湧き出しなし，$\nabla\cdot\boldsymbol{w}=0$ であることである．

$\boldsymbol{w}$ に対してそのベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{v}$ は式 (11) で与えられる．

例 5.3　任意の点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の長さを r とするとき，$\boldsymbol{w}=\nabla(1/r)$ は湧き出しなしである．$\boldsymbol{w}$ のベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{v}$ を求めよ．

［解］

$$\boldsymbol{w}=-\frac{1}{r^2}\nabla r=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=\left(-\frac{x}{r^3},\ -\frac{y}{r^3},\ -\frac{z}{r^3}\right)$$

積分路の始点として原点 O をとる．$w_3(x,y,0)=0$ であるから，式 (10) を用いれば $u_1=0$．つぎに式 (9) により，

$$\int_0^z w_2dz=\int_0^z\frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dz=\left[\frac{-yz}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]_0^z$$

$$=\frac{-yz}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$-\int_0^z w_1dz=\int_0^z\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dz=\frac{xz}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

ゆえに

$$\boldsymbol{v}=\frac{1}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(-yz,\ xz,\ 0)+\nabla f$$

で与えられる．f は任意のスカラー場である．◇

問　題

1.　スカラー場 $f=x^2+y^2$ を，点 A(1, 0, 0) と点 B(0, 1, 1) を結ぶ次の各曲線に沿って線積分せよ．

（1）　線分 AB

（2）　点 A, C(1, 1, 0), D(1, 1, 1), B を次々に結ぶ折線

（3）　定傾曲線 $C: x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=\dfrac{2}{\pi}t \quad \left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

2.　ベクトル場 $\boldsymbol{v}=(2xy,\ x^2-y^2,\ z)$ が渦なしであることを確かめよ．そして，問題 **1** の各曲線に沿って点 A から B まで線積分せよ．

3.　ベクトル場 $\boldsymbol{v}=(2xye^z,\ x^2e^z,\ x^2ye^z)$ が渦なしであることを示し，$\boldsymbol{v}=\nabla f$ であるようなスカラー場 f を求めよ．

4.　ベクトル場 $\boldsymbol{w}=(2y,\ 2xz,\ 3)$ は湧き出しなしであることを示し，そのベクトル・ポテンシャルを求めよ．

［解　答］

1.　（1）　線分 AB は媒介変数方程式 $x=1-t,\ y=t,\ z=t\ (0\leqq t\leqq 1)$ で表される．

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}=\sqrt{3}$$

$$\int_{AB}f\,ds=\int_0^1\{(1-t)^2+t^2\}\sqrt{3}\,dt=\sqrt{3}\int_0^1(2t^2-2t+1)dt=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

（2） 線分 AC, CD, DB 上で ds はそれぞれ $dy, dz, -dx$ に等しい．ゆえに

$$\left(\int_{AC}+\int_{CD}+\int_{DB}\right)(x^2+y^2)ds=\int_0^1(1+y^2)dy+\int_0^1 2dz+\int_1^0(x^2+1)(-dx)$$

$$=\left[y+\frac{y^3}{3}\right]_0^1+2+\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1=\frac{14}{3}$$

（3） 定傾曲線の線素は　$ds=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+\left(\frac{2}{\pi}\right)^2}dt=\sqrt{1+\left(\frac{2}{\pi}\right)^2}dt$　であり，その上で $f(x, y, z)=1$ であるから，

$$\int_C f ds=\int_0^{\pi/2}1\cdot\sqrt{1+\left(\frac{2}{\pi}\right)^2}dt=\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+1}$$

2. ∇v は対称テンソルとなるから，$\nabla\times v=0$ である．

（1） AB 上で $v=\{2(1-t)t,\ (1-t)^2-t^2,\ t\}$，$dr=(-dt, dt, dt)$

$$v\cdot dr=\{-2(1-t)t+(1-t)^2-t^2+t\}dt=(2t^2-3t+1)dt$$

$$\therefore\quad \int_{AB}v\cdot dr=\int_0^1(2t^2-3t+1)dt=\frac{1}{6}$$

（2） 線分 AC, CD, DB 上で dr はそれぞれ $(0, dy, 0)$，$(0, 0, dz)$，$(dx, 0, 0)$ である．ゆえに

$$\left(\int_{AC}+\int_{CD}+\int_{DB}\right)v\cdot dr=\int_0^1(1-y^2)dy+\int_0^1 zdz+\int_1^0 2xdx$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-1=\frac{1}{6}$$

（3） 定傾曲線 C 上で $v=\left(2\cos t\sin t,\ \cos^2 t-\sin^2 t,\ \frac{2}{\pi}t\right)$，$dr=\left(-\sin t,\ \cos t,\ \frac{2}{\pi}\right)dt$ であるから

$$v\cdot dr=\left\{-2\cos t\sin^2 t+(\cos^2 t-\sin^2 t)\cos t+\frac{4}{\pi^2}t\right\}dt$$

$$=\left\{4\cos^3 t-3\cos t+\frac{4}{\pi^2}t\right\}dt$$

$$\therefore\quad \int_C v\cdot dr=\int_0^{\pi/2}\left\{4\cos^3 t-3\cos t+\frac{4}{\pi^2}t\right\}dt=\frac{8}{3}-3+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

3.

$$\nabla v=\begin{pmatrix}2ye^z & 2xe^z & 2xye^z\\ 2xe^z & 0 & x^2e^z\\ 2xye^z & x^2e^z & x^2ye^z\end{pmatrix}$$

であり，これは対称テンソルであるから，$\nabla\times v=0$ である．原点 O を始点にとれば，式 (4) により

$$\int_0^x 2xye^z dx+\int_0^y 0^2\cdot e^z dy+\int_0^z 0^2\cdot 0\cdot e^z dz=x^2ye^z$$

ゆえに

$$f=x^2ye^z+\text{定数}$$

4.

$$\nabla \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 & 2z & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2x & 0 \end{pmatrix} \qquad \therefore \quad \nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0$$

ゆえに $\boldsymbol{w}$ は湧き出しなしである．式 (10) と (9) により，原点を始点にとり

$$u_1 = -\int_0^y 3\,dy = -3y$$

$$v_1 = \int_0^z 2xz\,dz - 3y = xz^2 - 3y, \qquad v_2 = -\int_0^z 2y\,dz = -2yz$$

ゆえに $\boldsymbol{v} = (xz^2 - 3y,\ -2yz,\ 0) + \nabla f$，$f$ は任意のスカラー場．

式 (8) によらないで，次のように直接解くこともできる．$v_3 = 0$ と仮定すれば

$$(\nabla \times \boldsymbol{v})_1 = -\frac{\partial v_2}{\partial z} = 2y, \qquad (\nabla \times \boldsymbol{v})_2 = \frac{\partial v_1}{\partial z} = 2xz$$

$$(\nabla \times \boldsymbol{v})_3 = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 3$$

第1式，第2式を積分すれば，u_1, u_2 を x, y の関数として

$$v_2 = -2yz + u_2, \qquad v_1 = xz^2 + u_1$$

ここで $u_2 = 0$ とおいて，これらを第3式に代入すれば

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = -3 \qquad \therefore \quad u_1 = -3y$$

となり，前の解と同じ答を得る．

§6. 積分公式

§3 で2変数のスカラー関数などの積分および曲面の面積について述べたが，ここでは面積分および体積分を定義し，それらの間に成り立つ重要な積分公式を述べよう．

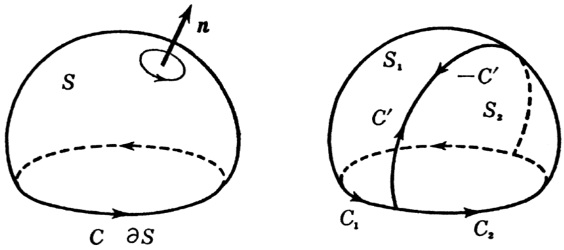
曲面 S の各点で単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の選び方は2通りあったが，S の全体で $\boldsymbol{n}$ が連続であるように選べるとき，S を**有向曲面**といい，$\boldsymbol{n}$ の正方向の側にある面を**表**とする．曲面 S の縁の曲線で，S の表面を左手に見て進む回転方向を正の向きにとったものを S の**境界**といい，∂S で示す（次頁の 2-13 図）．$-\boldsymbol{n}$ が単位法線ベクトルとして選ばれた曲面，いい換えれば S の表面と裏面を逆にした曲面を S の**逆向き**の有向曲面といい，$-S$ と書く．$\partial S = C$ ならば $\partial(-S) = -C = -\partial S$ である．

曲面 S をいくつかの有向曲面，たとえば S_1 と S_2 に分け，S_1 と S_2 の境界の共通部分が有向曲線として逆向きであるようにできるとき，すなわち

$$\partial S_1 = C_1 + C', \qquad \partial S_2 = C_2 - C'$$

と表されるとき，形式的に $S = S_1 + S_2$ と書けば

$$\partial S_1 + \partial S_2 = C_1 + C_2 = \partial S$$



2-13図

が成り立つ．この場合，S をやはり**有向曲面**という．球面や円環面のように，有界な領域 V を囲んでいる曲面を**閉曲面**という．閉曲面は有向曲面であることが知られており，$\partial S = 0$ すなわち境界をもたない．しかし，境界をもつ曲面のうちには，メービウスの帯のように向きの付けられないものがある．

有向曲面 S が方程式 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ で表され，媒介変数 (u, v) が領域 D を動くとき，S の各点 $\mathrm{P}(u, v)$ で定義されたスカラー場 f は (u, v) の関数

$$f(\mathrm{P}) = f(u, v)$$

で表される．これを曲面 S に沿ってのスカラー場といい，重積分

$$\iint_S f(u, v) dS = \iint_D f(u, v) \sqrt{EG - F^2} du dv$$

を曲面 S におけるスカラー場 $f(u, v)$ の**面積分**といい，記号

$$\iint_S f dS$$

で示す．ここに E, F, G は曲面 S の基本量である．逆向きの曲面 $-S$ に対しては

$$\iint_{-S} f dS = -\iint_S f dS$$

で定義する．

スカラー場 f が空間の領域 D で定義されているとき，D に含まれる有向

曲面 $S : \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$ に対して,

$$f(x_i(u, v))$$

は曲面に沿ってのスカラー場であり，スカラー場 f の曲面 S に沿っての面積分を定義することができる.

有向曲面 S に沿ってベクトル場 $\boldsymbol{a}(u, v)$ が与えられたとき，その法線方向の成分 $a_n=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}$ は S に沿ってのスカラー場になる．その面積分を有向曲面 S 上の**ベクトル場 $\boldsymbol{a}$ の面積分**という．この面積分は次の各式で表すことができる.

$$\iint_S a_n dS=\iint_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}dS=\iint_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S}$$

S の法線ベクトル場 $\boldsymbol{n}$ は単位ベクトルであるから，$\boldsymbol{n}$ が基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ となす角を θ_i とすれば，$\boldsymbol{n}$ の成分は方向余弦

$$\boldsymbol{n}=(\cos\theta_1,\ \cos\theta_2,\ \cos\theta_3)$$

で表される．ベクトル場 $\boldsymbol{a}$ の面積分はしばしば

$$\iint_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}dS=\iint_S (a_1\cos\theta_1+a_2\cos\theta_2+a_3\cos\theta_3)dS$$

の形で表される.

面積分をベクトル場やテンソル場に拡張して考えることができる．たとえば，テンソル場 $\boldsymbol{T}=(T_{ij})$ が曲面 S に沿って，あるいは S を含む空間の領域で定義されているとき,

$$\tilde{T}_{ij}=\iint_S T_{ij}dS$$

はテンソルの成分を構成する.

上の定義では曲面 S が (u, v) の1つの領域 D と1対1に表される場合を考えたが，一般には曲面 S を (u, v) の1つだけの領域と1対1に表すことはできない．有向曲面をいくつかの部分 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ に分け，各部分が (u, v) の領域と1対1になるようにし，各部分を S と同じ向きに方向づけて，すなわち各部分の単位法線ベクトルを S のそれと一致するようにとって,

$$\iint_S fdS=\left(\iint_{S_1}+\iint_{S_2}+\cdots+\iint_{S_n}\right)fdS$$

と定義する．

曲面 S が立体 V を囲む閉曲面であるとき，それを V の**境界**といい，$\partial V = S$ とする．V を2つの部分 V_1, V_2 に分け，それぞれの境界を $S_1 = \partial V_1$, $S_2 = \partial V_2$ とすれば，V_1 と V_2 が接する部分の曲面では表裏が逆になっているから

$$\iint_S f dS = \iint_{S_1} f dS + \iint_{S_2} f dS$$

が成り立つ．

スカラー場 f が立体 V を含む領域で定義されているとき，3重積分

$$\iiint_V f(x_1, x_2, x_3) dV$$

をスカラー場 f の V における**体積分**といい，$dV = dx_1 dx_2 dx_3$ を**体積素**という．とくにベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ はスカラー場であるから，その体積分

$$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{v} dV$$

を普通**ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の体積分**という．

面積分の場合と同様に，ベクトル場またはテンソル場の成分の体積分，たとえば

$$\tilde{T}_{ij} = \iiint_V T_{ij} dV$$

を考えることができる．これらは同じ形のテンソルを構成する．

例 6.1　xy 平面の領域 D の上で，方程式 $z = z(x, y)$ で表される曲面 S において，スカラー場 f の面積分は次の式で与えられる．

$$\iint_S f dS = \iint_D f \frac{dxdy}{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}_3}$$

ここに $\boldsymbol{e}_3$ は z 軸上の基本ベクトルである．同様に yz 平面，xz 平面上の領域で曲面の方程式が表されているときには，$\boldsymbol{e}_3$ を $\boldsymbol{e}_1$ あるいは $\boldsymbol{e}_2$ でおき換えて，上の式が成り立つ．

［**証 明**］　曲面 S のベクトル方程式は，D 上で

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z(x, y))$$

で表されるから，

$$r_x = (1, 0, z_x), \qquad r_y = (0, 1, z_y)$$
$$r_x \times r_y = (-z_x, -z_y, 1)$$

ゆえに単位法線ベクトルは

$$n = \frac{1}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}}(-z_x, -z_y, 1), \qquad n \cdot e_3 = \frac{1}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}}$$

一方面積素は

$$dS = |r_x \times r_y| dxdy = \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}\, dxdy \tag{1}$$
$$= \frac{dxdy}{n \cdot e_3}$$

◇

次にまず平面上のグリーンの定理を述べておこう．

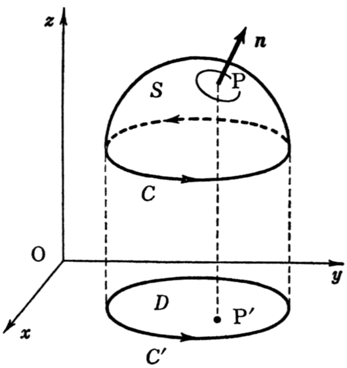
定理6.1　グリーンの定理　xy 平面上で単一閉曲線 C で囲まれた領域を D とし，C は正の向きをもつものとする．D を含む領域で連続な偏導関数をもつ関数 $P(x, y)$，$Q(x, y)$ について次の関係式が成り立つ．

$$\int_C (Pdx + Qdy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

この定理は既知のものとして，これを基礎にしてストークスの定理，ガウスの発散定理を証明することにしよう．

定理6.2　有向曲面を S，その境界の閉曲線を $C = \partial S$，S の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n} = (n_i)$ とする．そのとき S を含む領域で定義された関数 $f(x_i)$ について，次の関係式が成り立つ．

$$\iint_S \left(\frac{\partial f}{\partial z} n_2 - \frac{\partial f}{\partial y} n_3\right) dS = \int_C f dx$$
$$\iint_S \left(\frac{\partial f}{\partial x} n_3 - \frac{\partial f}{\partial z} n_1\right) dS = \int_C f dy$$
$$\iint_S \left(\frac{\partial f}{\partial y} n_1 - \frac{\partial f}{\partial x} n_2\right) dS = \int_C f dz$$



2-14 図

［証 明］　第1式を証明しよう．その左辺の積分を I とおく．まず曲面 S が z 軸に平行な直線と1回だけ交わるとき，S および C の xy

平面への正射影をそれぞれ D, C' とし，S が領域 D で方程式 $z=z(x,y)$ で表されているとする．S の表面が上方に向いていれば，C の正射影である境界 C' は xy 平面上で正の向きに回転している．そのとき $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_3=n_3$ であるから式 (1) により，

$$n_3dS=dxdy \tag{2}$$

また

$$n_2=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_2=\frac{-z_y}{\sqrt{z_x{}^2+z_y{}^2+1}}=-z_yn_3$$

であるから

$$n_2dS=-\frac{\partial z}{\partial y}dxdy \tag{3}$$

が成り立つ．ゆえに

$$I=-\iint_D\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy$$

である．関数 f は曲面 S の上では $f(x,y,z(x,y))$ であり，D における2変数 x, y の関数であるから，これを $F(x,y)$ とおけば，

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}$$

が成り立つ．ゆえにグリーンの定理を用いて

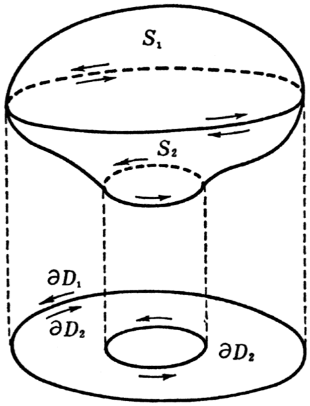
$$I=-\iint_D\frac{\partial F}{\partial y}dxdy=\int_{C'}Fdx$$

である．C' の点 (x,y) と C 上の対応点において $f(x,y,z(x,y))=F(x,y)$ であるから

$$I=\int_C f(x,y,z)dx$$

が成り立つ．

もし S の表面が下側に向いていれば，式 (2) と (3) の右辺の符号が逆になり，一方 xy 平面で C' の向きも逆になるから，やはり第 1 式が成り立つ．さらに S の形状が複雑な場合には曲面を適当な部分に分け，2 つの部分の共通の境界上での線積分は互いに消し合うことに注意すればよい．　◇



2-15 図

定理 6.3　ストークスの定理　前定理と同じ仮定のもとに，ベクトル場

$\boldsymbol{v}=(v_i)$ について次の関係が成り立つ.

$$\iint_S (\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}dS=\int_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} \tag{4}$$

［証 明］ 定理 6.2 の 3 つの関係式で, f をそれぞれ v_1, v_2, v_3 とおいて辺々を加えれば

$$\iint_S \{(\nabla_2 v_3-\nabla_3 v_2)n_1+(\nabla_3 v_1-\nabla_1 v_3)n_2+(\nabla_1 v_2-\nabla_2 v_1)n_3\}dS$$

$$=\int_C (v_1dx_1+v_2dx_2+v_3dx_3)$$

であり, これは式 (4) である. ◇

定理 6.4 閉曲面 S で囲まれた立体の領域を V とし, S の外側に向いた単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする. V を含む領域で定義されたスカラー場 f について, 次の関係式が成り立つ.

$$\iiint_V \nabla f\,dV=\iint_S f\boldsymbol{n}dS;\qquad \iiint_V \nabla_i f dV=\iint_S f n_i dS$$

［証 明］ $i=3$ の場合について証明しよう. 曲面 S が xy 平面の領域 D で方程式

$$z=g(x,y),\qquad z=h(x,y)$$

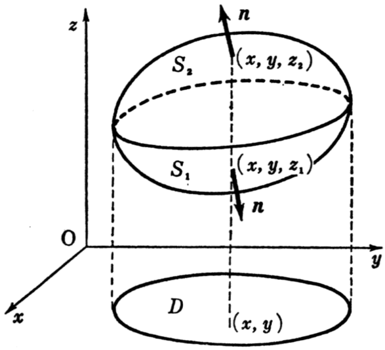
$$g(x,y)\leqq h(x,y)$$

で表される 2 つの曲面 S_1, S_2 からできている場合を考えよう. D の各点 (x,y) に対応する S_1, S_2 の点を z_1, z_2 とすれば

$$\int_{z_1}^{z_2}\frac{\partial f}{\partial z}dz=\Big[f(x,y,z)\Big]_{z_1}^{z_2}$$

$$=f(x,y,h(x,y))$$

$$-f(x,y,g(x,y))$$



2-16 図

である. これを D 上で積分すれば

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial z}dV=\iint_D\left(\int_{z_1}^{z_2}\frac{\partial f}{\partial z}dz\right)dxdy$$

$$=\iint_D f(x,y,h(x,y))dxdy-\iint_D f(x,y,g(x,y))dxdy$$

曲面 S_2 の各点で $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{e}_3$ とは鋭角をなすから $dxdy=n_3dS$, 一方 S_1 の各点では鈍角をなすから $n_3=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_3\leqq 0$ であり $dxdy=-n_3dS$ である. ゆえに

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial z} dV = \iint_{S_2} fn_3 dS + \iint_{S_1} fn_3 dS = \iint_S fn_3 dS$$ ◇

定理 6.5　ガウスの発散定理　前定理と同じ仮定のもとに，ベクトル場 $\boldsymbol{v} = (v_i)$ に対して，次の関係式が成り立つ．

$$\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{v} dV = \iint_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} dS$$

［証 明］　定理 6.4 で f として $\boldsymbol{v}$ の成分 v_i をとり，i について縮約すれば

$$\nabla_i v_i = \nabla\cdot\boldsymbol{v}, \qquad v_i n_i = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$$

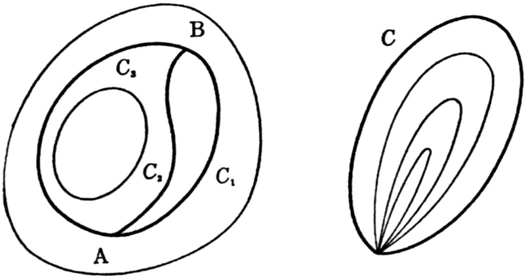
である． ◇

この定理で $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ は空間のスカラー場，$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ は曲面上のスカラー場であることに注意せよ．直交座標系でのテンソル場 $\boldsymbol{T} = (T_{ij})$ に対しても，

$$\iiint_V \nabla\boldsymbol{T}\, dV = \iint_S \boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{n}\, dS; \qquad \iiint_V \nabla_k T_{ij} dV = \iint_S T_{ij} n_k dS$$

が成り立つ．

空間の領域 D の 2 点 A, B を結ぶ 2 つの曲線 C_1, C_2 が，C_1 を D の中で連続的に動かして C_2 にすることができるとき，C_1 と C_2 は D で互いに**連続変形可能**であるという．2-17 図で C_1 と C_2 は互いに連続変形可能であるが，C_3 はそれらと連続変形可能でない．



2-17 図

領域 D の任意の閉曲線が D の中で連続的に一点に縮められるとき，領域 D は**単連結**であるという．このとき，D の 2 点を結ぶ任意の 2 つの曲線は互いに連続的に変形可能である．

定理 5.2 で，ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ が渦なし，$\nabla\times\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ ならば，$\nabla f = \boldsymbol{v}$ であるようなスカラー場 f が存在することを見た．しかし，例 5.2 で示したように，このようなスカラー場が領域のすべての点に対して一意的に定まるとは限らな

い．これに関連して，次の定理が成り立つ．

定理 6.6 空間の単連結領域 D で，ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ が渦なしならば，$\nabla f=\boldsymbol{v}$ であるようなスカラー場 f が領域 D で，定数を除いて，一意的に定まる．

［証 明］ ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に対して，§5 の式 (4) で作ったスカラー場 f が2点 A, P を結ぶ曲線に関係なく，点 P に対して一意的に定まることをいえばよい．A と P を結ぶ D 内の2つの曲線を C, C' とし，閉曲線 $C-C'$ を境界にもつ D の曲面 S を考える．そのとき

$$\int_{C-C'}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}=\iint_S(\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}dS=0$$

である．

$$\therefore\quad \int_C\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{C'}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}$$

◇

スカラー場 f がある領域 D で方程式

(5)
$$\Delta f=\nabla_i\nabla_i f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$$

を満たすとき，f は**調和関数**であるといい，方程式 (5) を**ラプラスの方程式**という．

例 6.2 スカラー場 f が領域 V で調和であり，境界 S 上でつねに0ならば，f は領域 V で恒等的に0である．

［証 明］ 仮定により

$$\nabla\cdot(f\nabla f)=(\nabla f)\cdot(\nabla f)+f\Delta f=|\nabla f|^2$$

ゆえに定理 6.5 により

$$\iiint_V|\nabla f|^2dV=\iiint_V\nabla\cdot(f\nabla f)dV=\iint_S f(\nabla f)\cdot\boldsymbol{n}dS$$

となる．S 上で $f=0$ であるから，この積分の値は0である．一方 $|\nabla f|^2\geqq 0$ であるから，$\nabla f=0$ でなければならない．ゆえに f は定数である．　◇

問　　題

1． xy 平面上の閉曲線 C で囲まれた図形 D の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\int_C(xdy-ydx)$$

で与えられる．これを用いて，楕円：$x=a\cos t$，$y=b\sin t$ $(0\leqq t\leqq 2\pi$, a, b は正の定数) の面積を求めよ．

2. 閉曲面 S で囲まれた立体の体積は，S 上の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とするとき，

$$V=\frac{1}{3}\iint_S \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}dS$$

で与えられる．これを用いて，半径 c の球の表面積と体積の関係を求めよ．

3. 原点を中心とし，半径1の上半球面を S とし，その境界である赤道を C として，ベクトル場 $\boldsymbol{v}=(y^2-x^2,\ 2xy+zx,\ 2xy)$ についてストークスの定理を確かめよ．

4. 柱面：$x^2+y^2=4$ と2平面：$z=0,\ z=1$ で囲まれた立体を V として，ベクトル場 $\boldsymbol{v}=(x^2,\ xy,\ z^2)$ についてガウスの発散定理を確かめよ．

5. 立体の領域を V，その境界を S，S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の方向の導関数を $\partial/\partial\boldsymbol{n}=n_i\nabla_i$ とする．スカラー場 f と g について次の公式を証明せよ．

(1) $$\iiint_V \Delta f dV=\iint_S (\nabla f)\cdot\boldsymbol{n}dS$$

(2) $$\iiint_V \nabla\cdot(f\nabla g)dV=\iiint_V \{f\Delta g+(\nabla f)\cdot(\nabla g)\}dV=\iint_S f(\nabla g\cdot\boldsymbol{n})dS$$

(3) $$\iiint_V (f\Delta g-g\Delta f)dV=\iint_S \{f(\nabla g\cdot\boldsymbol{n})-g(\nabla f\cdot\boldsymbol{n})\}dS$$

6. ある領域内で，任意の曲面 S 上の面積分 $\iint_S \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}dS$ の値が，曲面 S に関係なく S の境界である曲線 C だけに関係して定まるならば，$\boldsymbol{w}$ は湧き出しなし，$\nabla\cdot\boldsymbol{w}=0$ である．そのとき $\boldsymbol{w}$ のベクトル・ポテンシャルを $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}=\nabla\times\boldsymbol{v}$，とすれば，任意の曲面 S 上の $\boldsymbol{w}$ の面積分は境界 C 上の $\boldsymbol{v}$ の線積分に等しいことを証明せよ．

$$\iint_S \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}dS=\int_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}$$

[解　　答]

1. グリーンの定理 6.1 で $Q=x$, $P=-y$ と選べばよい．楕円に対して

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t+\sin^2 t)dt=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt=\pi ab$$

2. ガウスの発散定理 6.5 で $\boldsymbol{v}$ として位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ をとれば，$\nabla\cdot\boldsymbol{r}=3$ であるから

$$\iint_S \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}dS=\iiint_V 3dV=3V$$

半径 c の球面 S の単位法線ベクトルは各点において $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}/c$ であるから　V と S の関係は

$$V=\frac{1}{3}\iint_S \boldsymbol{r}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{c}dS=\frac{1}{3c}\iint_S r^2dS=\frac{c}{3}\iint_S dS=\frac{c}{3}S$$

$S=4\pi c^2$ であることを知れば $V=(4/3)\pi c^3$ であることがわかる．

3. $C: x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=0\ \ (0\leqq t\leqq 2\pi)$ であるから，

$$\int_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} \{(\sin^2 t - \cos^2 t)(-\sin t) + (2\cos t \sin t + 0x)\cos t + 2xy\cdot 0\}dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (-\sin^3 t + 3\cos^2 t \sin t)dt = 0$$

一方

$$\nabla \boldsymbol{v} = (\nabla_i v_j) = \begin{pmatrix} -2x & 2y+z & 2y \\ 2y & 2x & 2x \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix}$$
$$\therefore\quad \nabla\times\boldsymbol{v} = (x,\ -2y,\ z)$$

である．空間の極座標により，単位上半球面のベクトル方程式は

$$\boldsymbol{r} = (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta) \qquad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi\right)$$

で表され，例 3.1 により $\boldsymbol{n}$ と面積素 dS は $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}$, $dS = \sin\theta\, d\theta d\varphi$ であるから，

$$\iint_S (\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \{\sin^2\theta\cos^2\varphi - 2\sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta\}\sin\theta\, d\theta d\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi}\left\{\frac{2}{3}\cos^2\varphi - \frac{4}{3}\sin^2\varphi + \frac{1}{3}\right\}d\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi}(2\cos^2\varphi - 1)d\varphi = \int_0^{2\pi}\cos 2\varphi\, d\varphi = 0$$

4.
$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \nabla_i v_i = 2x + x + 2z = 3x + 2z$$

体積分は

$$\iiint_V (3x+2z)dxdydz = \iint_{x^2+y^2\leqq 4}\int_0^1 (3x+2z)dzdxdy$$
$$= \iint_{x^2+y^2\leqq 4}(3x+1)dxdy$$

xy 平面の極座標に直して

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (3r\cos\theta + 1)rdrd\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}(8\cos\theta + 2)d\theta = 4\pi$$

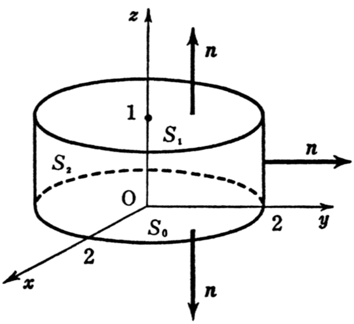
円柱の上底面 S_1 では $\boldsymbol{n} = (0, 0, 1)$, $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = z^2 = 1$，その上での面積分は

$$\iint_{S_1}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS = \iint_{S_1}dS = S_1 = 4\pi$$

円柱の下底面 S_0 では $\boldsymbol{n} = (0, 0, -1)$, $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = -z^2 = 0$　ゆえにその上での面積分は 0.

円柱の側面 S_2 は $\boldsymbol{r} = (2\cos\theta,\ 2\sin\theta,\ z)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi,\ 0 \leqq z \leqq 1)$ で表される．$\boldsymbol{n} = (\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$, $dS = 2d\theta dz$

$$\therefore\quad \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = 4\cos^3\theta + 4\cos\theta\sin^2\theta + 0$$



2 - 18 図

$$= 4\cos\theta$$

$$\iint_{S_2} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_0^1\int_0^{2\pi} 8\cos\theta\, d\theta dz = 0$$

ゆえに V の境界 $S = S_0 + S_1 + S_2$ 上の面積分は 4π であり，前半の体積分の値と等しい．

5. (1) $\Delta f = \nabla\cdot(\nabla f)$ にガウスの発散定理 6.5 を適用すればよい．

(2)
$$\nabla\cdot(f\nabla g) = f\nabla\cdot(\nabla g) + (\nabla f)\cdot(\nabla g) = f\Delta g + (\nabla f)\cdot(\nabla g)$$

一方，

$$\iiint_V \nabla\cdot(f\nabla g)dV = \iint_S (f\nabla g)\cdot\boldsymbol{n}dS = \iint_S f(\nabla g\cdot\boldsymbol{n})dS$$

(3) (2) で f と g とを入れ換えた式を作り，差をとればよい．

6. C を共通の境界にもつ任意の 2 曲面を S_1, S_2 とし，$\partial S_1 = \partial S_2$ であるように向きを付ければ，S_1 と S_2 で作られる曲面 $S = S_1 - S_2$ は閉曲面になる．ガウスの発散定理 6.5 により

$$\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{w}dV = \iint_S \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}dS = \left(\iint_{S_1} - \iint_{S_2}\right)\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}dS$$

仮定により，最終の式は 0 であるから，任意の立体の領域 V に対してこの式は 0 になるから，$\nabla\cdot\boldsymbol{w} = 0$ である．

$\boldsymbol{w} = \nabla\times\boldsymbol{v}$ とすれば，ストークスの定理 6.3 により

$$\iint_S \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}dS = \iint_S (\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}$$

3 テンソル解析の応用

§1. 流体力学

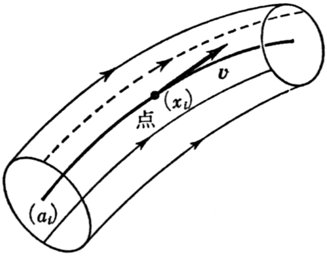
流体は質点の連続体であるから，その運動を記述するためにまず次の方法が考えられる． 各質点を区別するために標識 $(a_i)=(a_1, a_2, a_3)$ を付け，その質点の座標を標識と時間 t の関数として

$$x_i = x_i(a_1, a_2, a_3, t)$$

と表す．ここに標識 (a_i) は時刻 $t=0$ における各質点の座標などが用いられる．この場合，各質点の速度ベクトルは

$$v_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

で与えられる．



3-1 図

もっと一般的に用いられる有効な方法は，各質点に標識を付けることはやめて，流体の中で各点において各時刻に一定の速度が結びついているという考えを出発点にする．いい換えれば，各時刻 t に対して速度ベクトル $\boldsymbol{v}=(v_i)$ の分布があり，したがって速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ は点の座標 (x_i) と時間 t の関数として

$$v_i = v_i(x_1, x_2, x_3, t) \qquad (i=1, 2, 3)$$

で与えられていると考える． そのとき， 流体の運動はベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の流線，すなわち微分方程式

$$(1) \qquad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}; \qquad \frac{dx_i}{dt} = v_i(x_1, x_2, x_3, t)$$

の積分曲線として得られる．

関数 f を流体の各点に結びつけられ時間とともに変化する量であるとする．

f は一般に点の座標 (x_i) と時間 t の関数 $f(x_i, t)$ であり，この量が式 (1) で表された流体の運動とともに，どう変化するかを調べよう．

時刻 t に座標 $x_i(t)$ にあった点の時刻 $t+dt$ における座標は，高次の項を無視すれば

$$x_i+\frac{dx_i}{dt}dt=x_i+v_idt$$

である．したがって，時間 dt に対する量 $f(x_i, t)$ の変化は

$$\frac{1}{dt}\{f(x_i+v_idt, t+dt)-f(x_i, t)\}=\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}+\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x_i}v_i+\frac{\partial f}{\partial t}$$

これは時間 t の変化に対する量 $f(x_i, t)$ の実質的な変化の割合であって，Df/Dt などの記号で表されることが多い．ここでは df/dt で示すことにする．ベクトルの記号を用いれば

(2)　$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+v_i\nabla_i f=\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla f$$

で表すことができる．

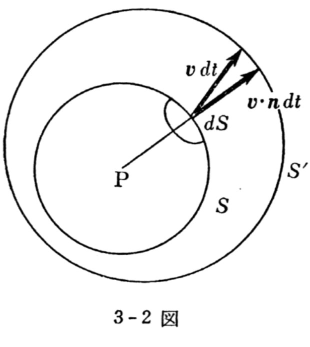
速度 $\boldsymbol{v}$ 自身，点 (x_i) と時間 t に関係する量であるから，加速度ベクトル $\boldsymbol{a}=(\alpha_i)$ は

(3)　$$\alpha_j=\frac{dv_j}{dt}=\frac{\partial v_j}{\partial t}+v_i\nabla_i v_j$$

で与えられる．また流体の密度 ρ は単位体積あたりの質量であり，一般に点 (x_i) と時間 t の関数であり，時間に対する実質的変化は

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_i\nabla_i\rho$$

である．



3-2 図

いま，V をその流体の中の 1 つの立体とし，その境界の閉曲面を S とする．S は流体の運動とともに動き，つねに同じ粒子からできてい

るものとする．流体が動くに従って，曲面 S 上の粒子は一般には法線方向ではなしに斜めに移動する．その速度 $\boldsymbol{v}$ の法線方向の成分は $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=v_in_i$ である．ゆえに微小時間 dt に対して，時刻 t における曲面 S と時刻 $t+dt$ において同じ粒子で作られる曲面 S' との間の薄い部分の体積は

$$\left(\iint_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS\right)dt$$

である．これは時間 t に対する体積 V の増分であるから，

$$\frac{dV}{dt}=\iint_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS=\iint_S v_in_idS$$

であり，これに第2章のガウスの発散定理 6.5 を適用すれば，

$$\frac{dV}{dt}=\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{v}dV=\iiint_V \nabla_iv_idV \tag{4}$$

を得る．

1点 P で時刻 t における単位体積あたりの体積変化率は，P を含みかつ P に収縮するような立体 V を考えて，その極限を考えれば

$$\lim_{V\to0}\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}=\lim_{V\to0}\frac{1}{V}\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{v}dV=\nabla\cdot\boldsymbol{v}(\mathrm{P}) \tag{5}$$

である．これが発散 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\nabla_iv_i$ の1つの物理的な意味を与えている．

ニュートン力学の基礎的原理として質量不変の原理がある．どのような質点系も，それがつねに同じ質点から成り立っているならば，質量は不変である．流体の速度ベクトル場が $\boldsymbol{v}(x,\ t)$ であり，各点の密度が $\rho(x,\ t)$ であるとき，流体の体積素 dV に対応する質量は ρdV である．流体が動くとき，体積 dV は変化するかも知れないが，ρdV は不変である．流体内の任意の立体 V の体積は

$$V=\iiint_V dV=\iiint_V \frac{1}{\rho}\rho dV$$

と表され，これの時間に対する変化率は

$$\frac{dV}{dt}=\iiint_V \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\rho dV\right)=\iiint_V \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)\rho dV$$

である．この単位体積あたりの変化率は式 (5) を求めたと同様にして，

$$\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}=\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

が成り立つ．これを式 (5) と比較して方程式

$$(6)\qquad \frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0;\qquad \frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla_i v_i=0$$

を導くことができる．これは流体に対する質量不変の方程式であり，**連続性の方程式**と呼ばれている．流体に質量の増加も減少もないならば，流体の速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ と密度スカラー ρ はこの方程式を満たさなければならない．式 (2) を ρ に適用して，連続性の方程式を

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0;\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla_i(\rho v_i)=0$$

の形に書くことができる．

速度ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の回転の半分

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\nabla\times\boldsymbol{v}$$

$$\omega_1=\frac{1}{2}(\nabla_2 v_3-\nabla_3 v_2),\qquad \omega_2=\frac{1}{2}(\nabla_3 v_1-\nabla_1 v_3),$$

$$\omega_3=\frac{1}{2}(\nabla_1 v_2-\nabla_2 v_1)$$

を**渦度ベクトル**といい，これに付随する交代テンソル場 $\boldsymbol{\Omega}=(\Omega_{ij})$

$$\Omega_{ij}=\varepsilon_{ijk}\omega_k=\frac{1}{2}(\nabla_i v_j-\nabla_j v_i)$$

を**渦度テンソル**という．

密度スカラー ρ が一定のとき，その流体は**非圧縮**であるという．そのとき連続性の方程式 (6) は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$$

となる．

また，$\boldsymbol{v}$ がポテンシャル φ，$\boldsymbol{v}=-\nabla\varphi$，をもつならば，$\nabla\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ すなわち $\boldsymbol{v}$ は渦なしであり，渦度ベクトルおよびテンソルは零になる．非圧縮流体に対しては，ポテンシャル φ はラプラスの方程式

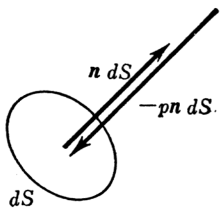
$$\Delta\varphi=0$$

を満足しなければならない. φ を**速度ポテンシャル**という.

固体や流体など連続体の中で作用する力には体積力と表面力などがある. 重力などのように体積素に比例する力が**体積力**であり, 圧力などのように平面素に比例する力が**表面力**である. 単位質量に作用する体積力を $\boldsymbol{f}=(f_i)$ で表すことにすれば, 体積素 dV に作用する体積力は $\rho \boldsymbol{f} dV$ である.

以下では理想流体を考えることにしよう. **理想流体**とはその中に小さな平面素 dS をとり, その平面素を通して一方の側から他方の側に作用する力がどの平面素についてもそれに垂直であるような理想的な流体である. 単位面積あたりのその力を**圧力**といい, p で表す. この定義だけからは, 1点を通る2つの平面素の法線方向が異なっても, それらに対する圧力 p の値が等しいかどうかは意味しないが, ニュートンの運動法則を流体内の小四面体に適用することにより, その点における圧力の値はとられた平面素に無関係であることが証明される. したがって, 圧力 p は点のみの関数であり, 平面素 dS を通して作用する力はベクトル $p\boldsymbol{n}dS$ である

いま, 流体の中に単連結領域を作る立体 V とその境界である曲面 S を考え, これらは流体とともに動くものとする. この立体 V に作用する力は単位質量あたり $\boldsymbol{f}$ の体積力と, 曲面 S を通して作用する圧力であって, S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は外側に向かってとられているから, 圧力は $-p\boldsymbol{n}dS$ で表される. そのとき, V に作用する力の全体は



3-3 図

$$\iiint_V \rho \boldsymbol{f} dV - \iint_S p\boldsymbol{n}dS$$

であり, 定理 6.4 を用いれば

$$\iiint_V (\rho \boldsymbol{f} - \nabla p) dV$$

と表される. これは時間 t についてのベクトル関数である.

一方, 立体 V の全運動量ベクトルは

$$\tilde{\boldsymbol{m}}=\iiint_V \rho \boldsymbol{v} dV$$

に等しく，これも時間 t についてのベクトル関数であり，結局

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{m}}}{dt}=\iiint_V\left\{\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}dV+\boldsymbol{v}\frac{d}{dt}(\rho dV)\right\}$$

である．体積 V は時間とともに変化するが，ρdV は一定のままであるから $d(\rho dV)/dt=0$ である．運動量の変化率は作用する力に等しいから，

$$\iiint_V\left\{\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}-\rho\boldsymbol{f}+\nabla p\right\}dV=0$$

になる．この積分が流体内にとられた任意の立体に対して 0 になるから

$$(7)\qquad \rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}-\rho\boldsymbol{f}+\nabla p=0;\qquad \rho\frac{dv_i}{dt}-\rho f_i+\nabla_i p=0$$

でなければならない．両辺を ρ で割って式 (3) を代入すれば，

$$(8)\qquad \frac{dv_i}{dt}=\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\nabla_j v_i=f_i-\frac{1}{\rho}\nabla_i p$$

の形に書くことができる．式 (7) および (8) は理想流体の運動方程式であり，**オイラーの方程式**といわれる．渦度テンソル $\boldsymbol{\Omega}=(\Omega_{ij})$ を用いれば

$$\nabla_j v_i=\nabla_i v_j-2\Omega_{ij}$$

であるから，方程式 (8) を

$$(9)\qquad \frac{dv_i}{dt}=\frac{\partial v_i}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla_i(v_j v_j)-2\Omega_{ij}v_j=f_i-\frac{1}{\rho}\nabla_i p$$

の形に書くこともできる．

一般に密度 ρ は圧力 p の関数と考えられる．その場合

$$P=\int\frac{dp}{\rho}$$

と定義すれば，P は圧力 p の関数，したがって点の関数であるから，その導関数は

$$\nabla_i P=\frac{dP}{dp}\nabla_i p=\frac{1}{\rho}\nabla_i p$$

となる．このとき方程式 (9) は

(10) $$\frac{dv_i}{dt}=\frac{\partial v_i}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla_i(v_jv_j)-2\Omega_{ij}v_j=f_i-\nabla_i P$$

となる.

さらに, 体積力 $\boldsymbol{f}$ が保存力場であって, そのポテンシャルが U, $\nabla U=-\boldsymbol{f}$, である場合, 方程式 (10) は

(11) $$\frac{\partial v_i}{\partial t}-2\Omega_{ij}v_j=-\nabla_i\left(U+P+\frac{1}{2}v_jv_j\right)$$

である. ここで次の2つの特別な場合を考えよう.

[渦なし運動の場合]　$\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{O}$ であり, 速度ポテンシャル φ, $\nabla\varphi=-\boldsymbol{v}$ を用いれば, 方程式 (11) は

$$\nabla_i\left\{-\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla_j\varphi)(\nabla_j\varphi)+U+P\right\}=0$$

となる. これは { } の中の式が座標 (x_i) に無関係であることを示しており, その式は t だけの関数として

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla_j\varphi)(\nabla_j\varphi)+U+P=F(t)$$

のように表される.

[速度ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ が時間 t には無関係である場合]　このとき $\partial\boldsymbol{v}/\partial t=\boldsymbol{0}$ であり, その流れは**定常**であるという. 方程式 (11) に v_i を縮合すれば, $\boldsymbol{\Omega}=(\Omega_{ij})$ は交代であるから $\Omega_{ij}v_iv_j=0$ であり, したがって

$$v_i\nabla_i\left(U+P+\frac{1}{2}v_jv_j\right)=0$$

を得る. 流線は方程式 (1) の積分曲線であるから, この式は流線に沿って

$$\frac{dx_i}{dt}\nabla_i\left(U+P+\frac{1}{2}v_jv_j\right)=\frac{d}{dt}\left(U+P+\frac{1}{2}v_jv_j\right)=0$$

であることを表しており, 流線に沿って $U+P+(1/2)v_jv_j$ は一定である. すなわち

定理 1.1　保存力場 $\boldsymbol{f}=-\nabla U$ の作用のもとに定常な運動をする理想流体に対しては, その流線に沿って

(12) $$U+P+\frac{1}{2}v_jv_j$$

は一定である．

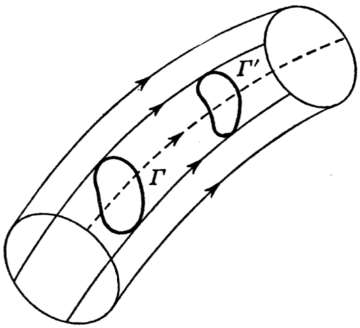
これを一般化された**ベルヌーイの定理**という．

渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega}=(\nabla\times\boldsymbol{v})/2$ の作る流線を**渦線**という．$\boldsymbol{\omega}$ が時間とともに変化するから，渦線も時間とともに変化する．流体内に閉曲線 Γ を考えれば，それを構成する質点は流体の運動に従って動くが，その閉曲線は閉じたままであるとする．Γ を境界とする流体内の曲面を S とする．第2章のストークスの定理 6.3 により速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ の Γ 上の線積分は

$$C=\oint_\Gamma \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}=\iint_S(\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}dS \tag{13}$$

で与えられる．これを閉曲線 Γ に対する**循環**という．

もし流体の運動が渦なしならば，$C=0$ である．Γ が空間内で固定されている限りつねに $C=0$ であるが，Γ が流体の運動に従って動くとき，循環 C がどのように変化するかを調べよう．Γ を構成する粒子は運動するが，その作る曲線は閉じたままであるとする．



3-4 図

ある時刻において特定の曲線 Γ について1つの媒介変数 s を用いれば，循環の式 (13) の線積分は

$$C=\oint_\Gamma \boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}ds$$

と表される．運動によって Γ が動いて Γ' になったとき，Γ' 上の粒子の速度 $\boldsymbol{v}$ および接線ベクトル $d\boldsymbol{r}/ds$ は変化するが，s は時間 t に全く関係なしに Γ' の媒介変数として用いることができる．ゆえに

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dt}&=\oint_\Gamma\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{d}{dt}\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right)ds\\&=\oint_\Gamma\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{d}{ds}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)ds\end{aligned}$$

保存力場 $\boldsymbol{f}=-\nabla U$ の作用による運動に対するオイラーの方程式 (10) は

$$\frac{dv_i}{dt} = -\nabla_i(U+P)$$

であるから，これを上の式に代入すれば

$$\frac{dC}{dt} = \oint_\Gamma \left\{ -\frac{d}{ds}(U+P) + v \cdot \frac{dv}{ds} \right\} ds$$

$$= -\oint_\Gamma \frac{d}{ds}\left(U + P - \frac{1}{2}v^2\right) ds = 0$$

ゆえに，密度 ρ が圧力 p の関数であるとき，保存力場の作用によって運動する流体の中の任意の閉曲線 Γ に沿っての循環 C は時間に関係なく一定である．これを**ケルヴィンの定理**という．

渦線から作られる1つの管の上に，その管を一まわりすることのない閉曲線を Γ とし，その管の面上で Γ を境界とする曲面の部分を S とすれば，S の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ はつねに渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega} = (\nabla \times \boldsymbol{v})/2$ に垂直であるから，

$$C = \oint_\Gamma \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n} dS = 0$$

となる．ケルヴィンの定理により，曲線 Γ が渦管の上につねにある限り，循環 C はすべての時刻に対して $C=0$ である．

問　　題

1. 密度 $\rho = \exp(-t^2)(x^2+y^2)$ とベクトル場 $\boldsymbol{v} = t(yz, -xz, 2z)$ は連続性の方程式を満たすことを証明せよ．このとき，渦度テンソル $\boldsymbol{\Omega}$ を求めよ．

2. ベクトル場

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{-2xyz}{(x^2+y^2)^2}, \frac{(x^2-y^2)z}{(x^2+y^2)^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$$

は非圧縮流体の運動の速度ベクトルになり得ることを示せ．また，渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を求めよ．

3. $\boldsymbol{v}$ が速度ポテンシャル φ をもち，非圧縮流体の中で単連結領域 V であるような立体の境界 S の各点において $\boldsymbol{v}$ の垂直成分が0であるならば，φ はその領域内で一定であることを証明せよ．

4. 理想流体の運動が渦なしかつ定常的ならば，式（12）で与えられる量は一定であることを証明せよ．

5. 非圧縮の理想流体が z 軸のまわりを剛体のように一定の角速度 ω で回転し，作用す

る体積力が重力だけであるならば,

$$\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}\omega^2r^2+gz=\text{一定}$$

であることを証明せよ. ここに ρ は密度, p は圧力, g は重力の加速度, r は粒子の z 軸からの距離である.

6. 密度 ρ が圧力 p だけの関数であって, 保存力場の作用によって運動する流体に対して, 次の式が成り立つことを証明せよ.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\Omega_{ij}\right)=\frac{1}{\rho}(\Omega_{ij}\nabla_k v_k+\Omega_{jk}\nabla_i v_k+\Omega_{ki}\nabla_j v_k)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right)=\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v};\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\omega_h}{\rho}\right)=\frac{1}{\rho}\omega_i\nabla_i v_h$$

[解　　答]

1. 密度および速度ベクトルの勾配はそれぞれ

$$\nabla_i\rho=\exp(-t^2)(2x,2y,0),\qquad \nabla_i v_j=t\begin{pmatrix}0 & -z & 0\\ z & 0 & 0\\ y & -x & 2\end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \frac{d\rho}{dt}&=\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_i\nabla_i\rho\\ &=-2t\exp(-t^2)(x^2+y^2)+t\exp(-t^2)(2xyz-2xyz)\\ &=-2t\rho\end{aligned}$$

一方, $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\nabla_i v_i=2t$. ゆえに連続性の方程式

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}=-2t\rho+2t\rho=0$$

が成り立つ. 渦度テンソルは

$$\boldsymbol{\Omega}=\frac{1}{2}(\nabla_i v_j-\nabla_j v_i)=\frac{t}{2}\begin{pmatrix}0 & -2z & -y\\ 2z & 0 & x\\ y & -x & 0\end{pmatrix}$$

2.

$$\nabla_1 v_1=\frac{-2yz(x^2+y^2)+8x^2yz}{(x^2+y^2)^3}=\frac{6x^2yz-2y^3z}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\nabla_1 v_2=\frac{2xz(x^2+y^2)-4(x^2-y^2)zx}{(x^2+y^2)^3}=\frac{-2x^3z+6xy^2z}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\nabla_1 v_3=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},\qquad \nabla_2 v_1=\frac{-2x^3z+6xy^2z}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\nabla_2 v_2=\frac{-2yz(x^2+y^2)-4(x^2-y^2)zy}{(x^2+y^2)^3}=\frac{-6x^2yz+2y^3z}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\nabla_2 v_3=\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\nabla_3 v_1 = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \nabla_3 v_2 = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \nabla_3 v_3 = 0.$$

ゆえに $\nabla \boldsymbol{v}$ を

$$\nabla \boldsymbol{v} = (\nabla_i v_j)$$

$$= \frac{1}{(x^2+y^2)^3}\begin{pmatrix} (6x^2-2y^2)yz & (6y^2-2x^2)xz & -2(x^2+y^2)xy \\ (6y^2-2x^2)xz & (2y^2-6x^2)yz & x^4-y^4 \\ -2(x^2+y^2)xy & x^4-y^4 & 0 \end{pmatrix}$$

と表すことができる.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \nabla_i v_i = \nabla_1 v_1 + \nabla_2 v_2 + \nabla_3 v_3 = 0$$

であるから, $\boldsymbol{v}$ は非圧縮流体の連続性の方程式を満足している. $\nabla \boldsymbol{v}$ は対称テンソルであるから渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0}$ である.

3. 非圧縮流体の渦なし運動においては, 速度ポテンシャル φ はラプラスの方程式 $\Delta\varphi = 0$ を満足しなければならない. ガウスの発散定理 6.5 と仮定により

$$\iiint_V \Delta\varphi^2 dV = \iiint_V 2\nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi)dV$$
$$= 2\iint_S \varphi\nabla\varphi\cdot\boldsymbol{n}dS = 0$$

一方

$$\iiint_V \Delta\varphi^2 dV = 2\iiint_V \{\varphi\Delta\varphi + (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi)\}dV$$
$$= 2\iiint_V (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi)dV$$

ゆえに V で $\nabla\varphi = 0$ でなければならない. ゆえに $\varphi =$ 一定.

4. 渦なしかつ定常的ならば, $\Omega_{ij} = 0$ かつ $\partial\boldsymbol{v}/\partial t = \boldsymbol{0}$ であるから, 方程式 (11) により

$$\nabla_i\left(U + P + \frac{1}{2}v_j v_j\right) = 0$$

ゆえに $U + P + (1/2)v_j v_j$ は一定である.

5. 粒子の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ とするとき, 速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v} = (\omega\boldsymbol{e}_3)\times\boldsymbol{r} = \omega(-y, x, 0)$ である. $\boldsymbol{v}$ が時間に無関係であるからその理想流体は定常流であり, $v^2 = \omega^2(x^2+y^2) = \omega^2 r^2$ である. また $\boldsymbol{f} = -g\boldsymbol{e}_3$ であるから, $\boldsymbol{f}$ は速度ポテンシャル $U = gz$ をもつ保存力場である. 問題 **4** により

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 = \text{一定} \quad \text{である.}$$

6. この場合連続性の方程式として, 式 (11) が成り立つ. i を j に, j を k におき換えたのち, x_i で微分すれば

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla_i v_j = 2\nabla_i(\Omega_{jk}v_k) - \nabla_i\nabla_j\left(U + P + \frac{1}{2}v^2\right)$$

この式で i と j を入れ換えて引き算すれば

$$\frac{\partial}{\partial t}\Omega_{ij}=\nabla_i(\Omega_{jk}v_k)-\nabla_j(\Omega_{ik}v_k)$$
$$=v_k\nabla_i\Omega_{jk}-v_k\nabla_j\Omega_{ik}+\Omega_{jk}\nabla_i v_k-\Omega_{ik}\nabla_j v_k$$

Ω_{ij} は交代であり，かつ $\nabla_i\Omega_{jk}+\nabla_j\Omega_{ki}+\nabla_k\Omega_{ij}=0$ が成り立つことに注意して，

$$\therefore\quad \frac{d}{dt}\Omega_{ij}=\frac{\partial\Omega_{ij}}{\partial t}+v_k\nabla_k\Omega_{ij}=\Omega_{jk}\nabla_i v_k+\Omega_{ki}\nabla_j v_k$$

さらに，方程式 (6) を考慮して

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\Omega_{ij}\right)=\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\Omega_{ij}-\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}\Omega_{ij}$$
$$=\frac{1}{\rho}(\Omega_{jk}\nabla_i v_k+\Omega_{ki}\nabla_j v_k+\Omega_{ij}\nabla_k v_k)$$

また $\varepsilon_{hij}\Omega_{ik}=\varepsilon_{hij}\varepsilon_{ikl}\omega_l=(-\delta_{hk}\delta_{jl}+\delta_{hl}\delta_{jk})\omega_l=\omega_h\delta_{jk}-\omega_j\delta_{hk}$, $\varepsilon_{hij}\Omega_{ij}=3\omega_h-\omega_h=2\omega_h$ であるから，上式に $\varepsilon_{hij}/2$ を縮合すれば

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\omega_h\right)=\frac{1}{2\rho}[-\varepsilon_{hji}\Omega_{jk}\nabla_i v_k-\varepsilon_{hij}\Omega_{ik}\nabla_j v_k+\varepsilon_{hij}\Omega_{ij}\nabla_k v_k]$$
$$=\frac{1}{2\rho}[-(\omega_h\delta_{ik}-\omega_i\delta_{hk})\nabla_i v_k-(\omega_h\delta_{jk}-\omega_j\delta_{hk})\nabla_j v_k+2\omega_h\nabla_k v_k]$$
$$=\frac{1}{2\rho}[-\omega_h\nabla_k v_k+\omega_i\nabla_i v_h-\omega_h\nabla_k v_k+\omega_j\nabla_j v_k+2\omega_h\nabla_k v_k]$$
$$=\frac{1}{\rho}\omega_i\nabla_i v_h$$

§2. 弾性論

流体や弾性体など質点が連続的に分布する連続体に外力が作用するとき，弾性体は変形を生ずる．その弾性の理論には，連続体の質点の変形すなわちひずみを幾何学的に記述すること，その外力すなわち応力によって連続体内に生ずる内部の反作用を記述すること，そしてひずみと応力の関係を一般のフックの法則で結びつけることが問題になる．

連続体の変形は，それに外部応力が働いたとき，各質点の相対的位置の変化によって記述される．初めの平衡状態にあるときの，各点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とし，その座標を (x_1, x_2, x_3) とする．外力の作用によって，その点が位置ベクトル $\boldsymbol{r}'=(x'_i)$ の点 P′ に移ったとすれば，変位はベクトル

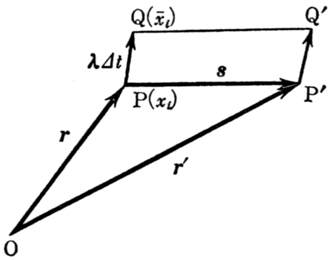
$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}$$

で表される．

ここに

$$\boldsymbol{s}=(s_i)$$

は点 P の座標 (x_i) の関数とする．$\boldsymbol{s}$ が定ベクトルならば，連続体全体は単なる平行移動を受けるだけで，質点間の相対的位置は変わらない．また剛体は，その任意の2点の距離が変形によって変わらないことによって特徴づけられる．



3-5 図

連続体で，点 $\mathrm{P}(x_i)$ の近くの点 $\mathrm{Q}(\bar{x}_i)$ が Q′ に変形されたとする．変形前の2点 P, Q の距離を L とし，変形後の2点 P′, Q′ の距離を L' とする．すなわち

$$L=|\mathrm{PQ}|,\qquad L'=|\mathrm{P'Q'}|$$

とする．そのとき距離の変化率

$$(1)\qquad e=\frac{L'-L}{L}$$

すなわち，単位長さに対する長さの増分を，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の方向の**伸縮率**という．この伸縮率 e を求めよう．

点 Q, Q′ の位置ベクトルはそれぞれ

$$\bar{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}(\bar{x}_i)\qquad \bar{\boldsymbol{r}}'=\boldsymbol{r}(\bar{x}_i)+\boldsymbol{s}(\bar{x}_i)$$

で与えられる．$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_i)$ とし，Δt を微小量として，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を

$$(2)\qquad \overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\boldsymbol{r}(\bar{x}_i)-\boldsymbol{r}(x_i)=\boldsymbol{\lambda}\Delta t$$

すなわち

$$\bar{x}_i=x_i+\lambda_i\Delta t$$

と表すとき，Δt の2次以上の項を無視して

$$(3)\qquad \boldsymbol{s}(\bar{x})=\boldsymbol{s}(x)+(\boldsymbol{\lambda}\cdot\nabla\boldsymbol{s})\Delta t;\qquad s_j(\bar{x})=s_j+(\lambda_i\nabla_i s_j)\Delta t$$

である．したがって

$$L^2=|\boldsymbol{r}(\bar{x})-\boldsymbol{r}(x)|^2=|\boldsymbol{\lambda}|^2\Delta t^2$$

$$\begin{aligned}L'^2&=|\{\boldsymbol{r}(\bar{x})+\boldsymbol{s}(\bar{x})\}-\{\boldsymbol{r}(x)+\boldsymbol{s}(x)\}|^2\\&=|\boldsymbol{r}(\bar{x})-\boldsymbol{r}(x)|^2+2(\boldsymbol{r}(\bar{x})-\boldsymbol{r}(x))\cdot(\boldsymbol{s}(\bar{x})-\boldsymbol{s}(x))+|\boldsymbol{s}(\bar{x})-\boldsymbol{s}(x)|^2\end{aligned}$$

であり，式 (2), (3) によりベクトル $\boldsymbol{s}=(s_i)$ とその勾配テンソル $\nabla\boldsymbol{s}=(\nabla_i s_j)$ の成分を用いて

$$L'^2=\{|\boldsymbol{\lambda}|^2+2\lambda_i(\nabla_i s_j)\lambda_j+(\lambda_i\nabla_i s_k)(\lambda_j\nabla_j s_k)\}\Delta t^2$$
$$=\{\delta_{ij}+2(\nabla_i s_j)+(\nabla_i s_k)(\nabla_j s_k)\}\lambda_i\lambda_j\Delta t^2$$

と書くことができる．ゆえに，

(4) $$\frac{L'^2-L^2}{L^2}=\{2(\nabla_i s_j)+(\nabla_i s_k)(\nabla_j s_k)\}\lambda_i\lambda_j$$

という関係が得られる．このとき

$$E_{ij}=\frac{1}{2}\{\nabla_i s_j+\nabla_j s_i+(\nabla_i s_k)(\nabla_j s_k)\}$$

とおき，これを成分にもつテンソル $\boldsymbol{E}=(E_{ij})$ を**ひずみテンソル**という．このテンソルを用いれば，式 (4) は

(5) $$\frac{L'^2-L^2}{L^2}=2E_{ij}\lambda_i\lambda_j=2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda})$$

と表される．

しかし，この式の左辺は (1) で定義した伸縮率 e を表してはいない．伸縮率 e を求めるために，とくに変位ベクトル $\boldsymbol{s}$ の点 P の位置による変化が微小であって，いい替えれば $\nabla\boldsymbol{s}$ の大きさが小さくてその2次以上の項を無視できる場合を考えよう．このような変位を**微小変位**という．この場合，式 (4) の右辺で $(\nabla_i s_k)(\nabla_j s_k)$ の項を無視すれば，

(6) $$\frac{L'^2-L^2}{L^2}=2(\nabla_i s_j)\lambda_i\lambda_j$$

である．一方，この左辺は

$$\frac{L'^2-L^2}{L^2}=\frac{L'+L}{L}\cdot\frac{L'-L}{L}=\left(2+\frac{L'-L}{L}\right)\frac{L'-L}{L}$$

と表される． $\nabla_i s_j$ が小さいときこの左辺も小さくなければならないから，$(L'-L)/L$ は $\nabla_i s_j$ と同じ位数でなければならない．したがって， $L\to 0$ とするとき

$$\lim_{L\to 0}\frac{L'^2-L^2}{L^2}=2\lim_{L\to 0}\frac{L'-L}{L}=2e$$

ゆえに点 P における伸縮率 e は

$$e=(\nabla_i s_j)\lambda_i\lambda_j$$

で表され，ひずみテンソル $\boldsymbol{E}=(E_{ij})$ は

$$E_{ij}=\frac{1}{2}(\nabla_i s_j+\nabla_j s_i)$$

となる．

次に，応力について考えよう．物体の中に平面素 dS をとり，その単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}=(n_i)$ とする．平面素 dS を通して正の側から負の側に作用する力を考えよう．ただし，理想流体においては圧力はつねに平面素に対して垂直に働くと考えたが，ここでは力は必ずしも平面素に垂直に働くとは考えない．平面素 dS の面積 dS に比例する力を $\boldsymbol{\tau}dS$ で表し，ベクトル $\boldsymbol{\tau}=(\tau_i)$ を**応力**という．したがって，応力は単位面積あたりの力である．一般に，応力 $\boldsymbol{\tau}$ はその平面素 dS の位置を決定する点 $\mathrm{P}(x_i)$ と，その面素の方向を決定する単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}=(n_i)$ とのベクトル関数である．これを

$$\boldsymbol{\tau}=F(x,\ \boldsymbol{n});\qquad \tau_i=F_i(x,\ n_j)$$

と表すことにし，この関数 F の形を求めよう．平面素 dS を通してその負の側から正の側におよぼす力は，$F(x,\ -\boldsymbol{n})$ で表されるがニュートンの運動の第3法則により，これは $-\boldsymbol{\tau}$ に等しいから，

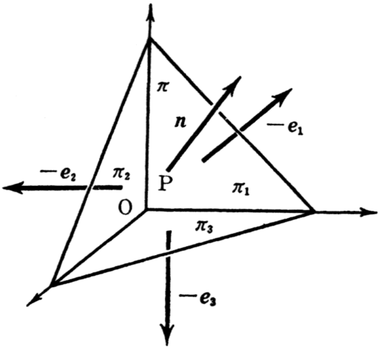
$$F(x,\ -\boldsymbol{n})=-F(x,\ \boldsymbol{n})$$

である．

定理 2.1　応力 $\boldsymbol{\tau}$ は $\boldsymbol{n}$ の線形変換

$$\boldsymbol{\tau}=T(\boldsymbol{n});\qquad \tau_i=T_{ij}n_j$$

で表される．ここに $\boldsymbol{T}=(T_{ij})$ は2階のテンソルであり，これを**応力テンソル**という．



3-6 図

［証明］ 物体内の任意の点 P と，P を通る平面 π を考える．π_1, π_2, π_3 をそれぞれ x_1 軸，x_2 軸，x_3 軸に垂直な平面とし，平面 π を1つの三角形で切り，その三角形の中に点 P があるようにする．それら4平面で作

られる四面体の1つの面上に点 P がある．π, π_1, π_2, π_3 の単位法線ベクトルはいずれも四面体の外向きにとる．四面体の面の面積を S, S_1, S_2, S_3 とする．

いま $\boldsymbol{n}=(n_1, n_2, n_3)$ のすべての成分が正または0の場合には，π_1, π_2, π_3 の単位法線ベクトルはそれぞれ $-\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_3$ であり，

（7）
$$S_1=Sn_1,\qquad S_2=Sn_2,\qquad S_3=Sn_3$$

なる関係がある．

いま物体が体積力を受け，体積素 dV に作用するその力は $\boldsymbol{f}dV$ であるとする．運動の第2法則に従えば，四面体の中に含まれる物質のモーメント $\boldsymbol{M}$ の変化率は，それに作用する外力全体に等しいから，

（8）
$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt}=\iiint_V \boldsymbol{f}dV+\iint_S \boldsymbol{\tau}dS+\iint_{S_1}\boldsymbol{\tau}_1 dS_1+\iint_{S_2}\boldsymbol{\tau}_2 dS_2+\iint_{S_3}\boldsymbol{\tau}_3 dS_3$$

が成り立つ．ここに $\boldsymbol{\tau}_1$ は S_1 の各点 (x_i) において

$$\boldsymbol{\tau}_1=\boldsymbol{F}(x, -\boldsymbol{e}_1)=-\boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{e}_1)$$

で表される．$\boldsymbol{\tau}_2, \boldsymbol{\tau}_3$ についても同様である．

さて，いま四面体の3面が座標平面に平行であることを保持したまま，点 P に収縮させる．そのとき，四面体の各面の方向はそのままであるから，関係式 (7) も保たれる．この収縮の過程で四面体の最長辺の長さを a とすれば，四面体の体積は位数が a^3 であるから，

$$\lim_{a\to 0}\frac{1}{a^2}\frac{d\boldsymbol{M}}{dt}=0,\qquad \lim_{a\to 0}\frac{1}{a^2}\iiint_V \boldsymbol{f}dV=0$$

である．ゆえに式 (8) から

（9）
$$\lim_{a\to 0}\frac{1}{a^2}\left(\iint_S \boldsymbol{\tau}dS+\iint_{S_1}\boldsymbol{\tau}_1 dS_1+\iint_{S_2}\boldsymbol{\tau}_2 dS_2+\iint_{S_3}\boldsymbol{\tau}_3 dS_3\right)=0$$

が成り立つ．$\boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{n})$ が $\mathrm{P}(x_i)$ において連続であると仮定すれば，$a\to 0$ のとき

$$\boldsymbol{\tau}\to \boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{n}),\qquad \boldsymbol{\tau}_j\to -\boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{e}_j)\qquad (j=1, 2, 3)$$

であるから，式 (9) で被積分ベクトル関数を定ベクトル $\boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{n})$ または $-\boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{e}_j)$ でおき換え，面積 S, S_j については関係式 (7) を用いれば，式 (9) の極限値について

$$\lim_{a\to 0}\frac{1}{a^2}\left\{\boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{n})\iint_S dS-\sum_{j=1}^{3}\boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{e}_j)\iint_{S_j} dS_j\right\}$$
$$=\left\{\boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{n})-\sum_{j=1}^{3}\boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{e}_j)n_j\right\}\lim_{a\to 0}\frac{S}{a^2}=0$$

が成り立つ．面積 S は a^2 に比例するから，$\lim_{a\to 0} S/a^2$ は0でない．ゆえに，$F(x, e_j)$ を成分で表して

$$T_{ij}(x)=F_i(x, e_j)$$

とおけば，総和の規約を用いて

$$(10)\qquad \boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{n})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n});\qquad \tau_i=F_i(x, e_j)n_j=T_{ij}n_j$$

の形に表すことができる．

ここで，$T_{ij}(x)$ は考える点 $\mathrm{P}(x_i)$ には従属するが，平面素の方向 $\boldsymbol{n}$ には無関係である．そして式 (10) は $\boldsymbol{n}$ について線形であり，任意の方向のベクトル $\boldsymbol{n}$ に対して応力 $\boldsymbol{\tau}$ を対応させるから，T_{ij} は1つの2階のテンソル

$$\boldsymbol{T}=(T_{ij})$$

を構成する．　◇

以上に述べた応力の概念は任意の連続体，剛体あるいは流体に適用することができる．ある連続体に対する運動方程式を求めるためには，その連続体の一部分に運動の第2法則を適用すればよい．これはすでに理想流体に対して行ったところであるが，これを一般の物体に一般化するためには，その際の圧力 $-p\boldsymbol{n}$ の代りに応力 $\boldsymbol{\tau}$ を用いればよい．詳しくいえば，連続体の中に立体 V とその境界の曲面 S を考える．この立体 V に作用する単位質量あたり $\boldsymbol{f}$ の体積力と，曲面 S を通して働く応力が $\boldsymbol{\tau}$ であるとき，V に作用する力の全体は

$$\iiint_V \rho\boldsymbol{f}dV+\iint_S \boldsymbol{\tau}dS$$

である．第2章の定理 6.4 により，最後の積分の成分は

$$\iint_S \tau_i dS=\iint_S T_{ij}n_j dS=\iiint_V \nabla_j T_{ij}dV$$

に等しい．前節の運動方程式 (7) を導いたと全く同様にして，質点の速度ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とするとき，

$$(11)\qquad \rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\rho\boldsymbol{f}+\nabla\cdot\boldsymbol{T};\qquad \rho\frac{dv_i}{dt}=\rho f_i+\nabla_j T_{ij}$$

を得ることができる．これが**連続体の運動方程式**である．

応力テンソル $\boldsymbol{T}=(T_{ij})$ が対称であることは，その定義からは明らかでな

いが，次のように証明される．

定理 2.2　応力テンソル $\boldsymbol{T}=(T_{ij})$ は対称である．

$$T_{ij}=T_{ji}$$

［証 明］ 1定点のまわりの1つの物理系の角運動量の時間に対する変化率は，その系に作用する外力のモーメントに等しい（第2章，§2 式 (17)）．いま定点として原点 O をとる．そのとき，質量 m の質点に対する角運動量テンソル $\boldsymbol{H}$ は第2章，§2 式 (24) で定義された．連続体中の立体 V に対し，質量分布を ρ とするとき，全角運動量は

$$\tilde{\boldsymbol{H}}=\iiint_V \rho(\boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{r})dV; \qquad \tilde{H}_{ij}=\iiint_V \rho(x_iv_j-v_ix_j)dV$$

で与えられる．一方，外力のモーメント・テンソルは

$$\tilde{\boldsymbol{M}}=\iiint_V \rho(\boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}\otimes\boldsymbol{r})dV+\iint_S(\boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}\otimes\boldsymbol{r})dS;$$

$$\tilde{M}_{ij}=\iiint_V \rho(x_if_j-f_ix_j)dV+\iint_S(x_i\tau_j-\tau_ix_j)dS$$

である．角運動量の保存則により

$$\frac{d\tilde{H}_{ij}}{dt}=\tilde{M}_{ij}$$

であるから，等式

$$\iiint_V \rho\left(x_i\frac{dv_j}{dt}-\frac{dv_i}{dt}x_j\right)dV=\iiint_V \rho(x_if_j-f_ix_j)dV$$
$$+\iint_S(x_iT_{jk}-x_jT_{ik})n_kdS$$

が成り立つ．最後の面積分に第2章 定理 6.5 を適用して，$\nabla_k x_i=\delta_{ik}$ に注意すれば

$$\iint_S(x_iT_{jk}-x_jT_{ik})n_kdS$$
$$=\iiint_V\{(x_i\nabla_kT_{jk}-x_j\nabla_kT_{ik})+(T_{ji}-T_{ij})\}dV$$

と表される．これを上式に代入し，連続体の運動方程式 (11) を用いれば，

$$\iiint_V(T_{ji}-T_{ij})dV=0 \tag{12}$$

の項を除いて他の項はすべて互いに消しあっている．式 (12) が連続体内の任意の立体 V に対して成り立つから，

$$T_{ij}=T_{ji}$$

が導かれ，応力テンソル $\boldsymbol{T}=(T_{ij})$ は対称である．　◇

いままで別々に取り扱われてきたひずみと応力を結びつける基礎的な原理は

「応力はひずみの1次斉次関数である」

であって，これを一般化された**フックの法則**という．この法則は応力テンソル $\boldsymbol{T}=(T_{ij})$ がひずみテンソル $\boldsymbol{E}=(E_{ij})$ の成分の1次式

(13) $$T_{ij}=C_{ijkl}E_{kl}$$

で表されることを意味し，**ひずみ-応力方程式**といわれる．この関係は変形が弾性限界を超えない限り，多くの物体について確かめられている．

弾性的性質が点に従属して変化するような不等質物体の場合には，係数 C_{ijkl} は点の関数になるが，ここではその係数が定数であるような等質体の場合を考えよう．

ひずみテンソル $\boldsymbol{E}$ が対称，$E_{kl}=E_{lk}$，であるから

(14) $$C_{ijkl}=C_{ijlk}$$

としておいて差し支えない．さらに，応力テンソル $\boldsymbol{T}$ も対称であるから

(15) $$C_{ijkl}=C_{jikl}$$

でなければならない．式 (13) は任意のひずみテンソル $\boldsymbol{E}$ に対して応力テンソル $\boldsymbol{T}$ を対応させる式であり，したがって C_{ijkl} は4階の直交テンソルの成分になっている．このテンソル

$$\boldsymbol{C}=(C_{ijkl})$$

を**弾性テンソル**という．さらに，

(16) $$C_{ijkl}=C_{klij}$$

の形の対称性が成り立つことが証明される．

いま，弾性体が等方性である場合，すなわちすべての直交座標系において弾性的性質が同じ形で記述される場合を考えよう．テンソルの等方性については §4 で述べるが，ここでは，クロネッカーのデルタから構成される4階のテンソルの最も一般の形

(17) $$C_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu\delta_{ik}\delta_{jl}+\nu\delta_{il}\delta_{jk}$$

で対称性 (14), (15) を満たすものを求めることを考えよう．直交基底の変換によって，クロネッカーのデルタはどの直交基底においても同じ成分 δ_{ij} をもつから，式 (17) で与えられるテンソル $\boldsymbol{C}$ はどの直交基底でも同じ成分をも

っている，すなわち等方性である．

式 (17) を式 (14) に代入すれば，

$$\mu\delta_{ik}\delta_{jl}+\nu\delta_{il}\delta_{jk}=\mu\delta_{il}\delta_{jk}+\nu\delta_{ik}\delta_{jl}$$

すなわち

$$(\mu-\nu)(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk})=0$$

が成り立たなければならない．この式で j と l を縮約すれば $2(\mu-\nu)\delta_{ik}=0$ となり，$\mu=\nu$ でなければならないことがわかる．ゆえに式 (17) は

$$C_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}) \tag{18}$$

となる．この式は対称性 (15), (16) を自動的に満たしているから，式 (18) で与えられる4階のテンソル $\boldsymbol{C}=(C_{ijkl})$ を等方性体の弾性テンソルとして採用することができる．この式は2つの定数 λ, μ をもち，これらは弾性的性質に結びつくものであり，λ は**ラメの定数**，μ は**剛性率**といわれる．

ひずみ－応力方程式 (13) に式 (18) を代入すれば

$$T_{ij}=\lambda\delta_{ij}\theta+2\mu E_{ij} \tag{19}$$

ただし，θ は $\boldsymbol{E}$ のトレース $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{E}$

$$\theta=E_{ii}=E_{11}+E_{22}+E_{33}=\nabla_i s_i$$

であり，**伸縮率**である．

関係式 (19) を逆に E_{ij} について解けば

$$EE_{ij}=(1+\sigma)T_{ij}-\sigma\delta_{ij}T_{kk} \tag{20}$$

と表すことができる．ここに E, σ は

$$E=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu},\qquad \sigma=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \tag{21}$$

で与えられ，E は**ヤング率**，σ は**ポアッソン比**ともいわれる．逆にラメの定数と剛性率をこれらで次のように表すことができる．

$$\lambda=\frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)},\qquad \mu=\frac{E}{2(1+\sigma)}$$

式 (19) の発散を求めれば

$$\nabla_j T_{ij}=\lambda\delta_{ij}\nabla_j\theta+\mu\nabla_j(\nabla_i s_j+\nabla_j s_i)$$
$$=\lambda\nabla_i\theta+\mu\nabla_i\theta+\mu\Delta s_i$$

である．これを運動方程式（11）に代入すれば，**弾性体の運動方程式**

$$(22)\qquad \rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\rho\boldsymbol{f}+(\lambda+\mu)\nabla\theta+\mu\Delta\boldsymbol{s};\qquad \rho\frac{dv_i}{dt}=\rho f_i+(\lambda+\mu)\nabla_i\theta+\mu\Delta s_i$$

が導かれる．

問　題

1. 変位 $\boldsymbol{s}$ によって生ずるひずみテンソル $\boldsymbol{E}=(E_{ij})$ について，両立条件の方程式

$$\nabla_k\nabla_l E_{ij}+\nabla_i\nabla_j E_{kl}-\nabla_j\nabla_l E_{ik}-\nabla_k\nabla_i E_{lj}=0$$

が成り立つことを証明せよ

2. 関係式（19）を E_{ij} について解き，式（20）を導け．

3. 体積力 $\boldsymbol{f}=(f_i)$ のもとで平衡状態にある等質等方性体において，$\Theta=T_{kk}$ とおけば，Θ は

$$(1-\sigma)\Delta\Theta+(1+\sigma)\rho\nabla\cdot\boldsymbol{f}=0$$

を満たすことを証明せよ．

4. 4階の弾性テンソル $C=(C_{ijkl})$ の $3^4=81$ 個の成分のうち，次の場合の独立な成分の個数を求めよ．

（1） 対称性　$C_{ijkl}=C_{ijlk}$，$C_{ijkl}=C_{jikl}$　をもつ．

（2） さらに対称性　$C_{ijkl}=C_{klij}$　をもつ．

［解　　答］

1. $$2E_{ij}=\nabla_i s_j+\nabla_j s_i,\qquad 2\nabla_k\nabla_l E_{ij}=\nabla_k\nabla_l\nabla_i s_j+\nabla_k\nabla_l\nabla_j s_i$$
であり，$\nabla_k\nabla_l\nabla_i s_j$ は k, l, i について対称である．

2. 式（19）を i, j について縮約すれば

$$T_{kk}=3\lambda E_{kk}+2\mu E_{kk}=(3\lambda+2\mu)\theta$$

ゆえに式（19）より

$$2\mu(3\lambda+2\mu)E_{ij}=(3\lambda+2\mu)T_{ij}-\lambda\delta_{ij}T_{kk}$$

この両辺を $2(\lambda+\mu)$ で割って，係数を（21）のようにおけば，式（20）が導かれる．

3. 式（19）から $\Theta=(3\lambda+2\mu)\theta$ である．$\boldsymbol{v}=0$ とした運動方程式（22）により

$$\rho f_i+(\lambda+\mu)\nabla_i\theta+\mu\Delta s_i=0$$

であり，この両辺の発散をとれば，

$$\rho\nabla_i f_i+(\lambda+2\mu)\Delta\theta=0$$

$$\therefore\quad (3\lambda+2\mu)\rho\nabla_i f_i+(\lambda+2\mu)\Delta\Theta=0$$

これから方程式を導くことができる．

4. （1） $k, l=1, 2, 3$ について対称であるから，k と l の重複する場合も含めて取り得る指標の組合せは $3\times4/2=6$ 通りである．同様に i と j の取り得る組合せの数は6通りであり，したがって独立な成分の個数は $6\times6=36$.

（2） (1) の i と j, k と l が取る指標の組合せのうち，それらが同時に入れ換ったものはこの対称性によって同じであるから，$(6\times7)/2=21$ 通りである．

§3. 電磁気学

電磁気学の基礎であるマックスウェルの方程式をテンソル解析の立場から見直すことを考えよう．

真空中で，MKS 単位系を用いる．電場ベクトルを $\boldsymbol{E}$, 磁場ベクトルを $\boldsymbol{h}$, 電流密度ベクトルを $\boldsymbol{j}$, 電荷密度スカラーを ρ とする．これらは点 $\mathrm{P}(x_i)$ と時間 t の関数であって，これらの間には次の関係式が成り立つ．

アンペールの法則

（1）
$$\nabla\times\boldsymbol{h}-\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\boldsymbol{j}$$

ファラディの法則

（2）
$$\nabla\times\boldsymbol{E}+\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{h}}{\partial t}=\boldsymbol{0}$$

電気に関するガウスの定理

（3）
$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

磁気に関するガウスの定理

（4）
$$\nabla\cdot\boldsymbol{h}=0$$

ここで ε_0 は真空中の誘電率，μ_0 は真空中の透磁率であり，真空中の光速 c に対して

$$\varepsilon_0\mu_0=\frac{1}{c^2}$$

という関係がある．これら4つの方程式を電磁場に関する**マックスウェルの基礎方程式**という．

ファラディの法則 (2) の両辺の回転をとれば，

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})+\mu_0\nabla\times\left(\frac{\partial\boldsymbol{h}}{\partial t}\right)=\boldsymbol{0}$$

となる．∇ は偏微分であるから，t についての偏微分と順序を入れ換えてもよい．そのうえでアンペールの法則（1）を代入すれば

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})+\mu_0\left[\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}+\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t}\right]=\boldsymbol{0}$$

である．一方，第2章 定理 4.3 の公式と電気に関するガウスの定理（3）を用いて

$$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})&=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\Delta\boldsymbol{E}\\&=\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho-\Delta\boldsymbol{E}\end{aligned}$$

であり，これらの２つの方程式から

$$(5)\qquad \Delta\boldsymbol{E}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\nabla\rho+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t}\right)$$

が導かれる．同様にして，ファラディの法則（1）から，方程式

$$(6)\qquad \Delta\boldsymbol{h}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{h}}{\partial t^2}=-\nabla\times\boldsymbol{j}$$

が成り立つことが証明される．方程式（5）と（6）はそれぞれ電場および磁場についての **波動方程式** といわれる．

いま，マックスウェルの基礎方程式をベクトルの成分と回転および発散の定義式を用いて表せば，それぞれ

$$\varepsilon_{ijk}\nabla_j h_k-\varepsilon_0\frac{\partial E_i}{\partial t}=j_i$$

$$\varepsilon_{ijk}\nabla_j E_k+\mu_0\frac{\partial h_i}{\partial t}=0$$

$$\nabla_i E_i=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\nabla_i h_i=0$$

となる．ここでひとつ奇妙なことに気がつかれるかも知れない．もし $\boldsymbol{E}$ も $\boldsymbol{h}$ もともに極性ベクトルであるとすれば，それらの回転 $\nabla\times\boldsymbol{E}$, $\nabla\times\boldsymbol{h}$ は軸性ベクトルであるから，最初の２つの方程式では極性ベクトルと軸性ベクトルが

等しいことになってしまう．逆の向きの座標系をとれば相反する符号が現われることになり矛盾を生じる．もし一方が軸性ベクトルであれば，この矛盾は生じない．

事実，曲線 C 上に強さ I の電流が流れるとき，空間の点 P に対する C 上の点 Q の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とし，$r=|\boldsymbol{r}|$ とすれば，磁場ベクトル $\boldsymbol{h}$ はビオ－サヴァルの法則により，曲線上にない各点 P に対して

$$\boldsymbol{h}_{\mathrm{P}}=\frac{1}{4\pi}\int_C \frac{I\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r}}{r^3}$$

で与えられる軸性ベクトルである．

それゆえ，$\boldsymbol{h}$ に付随する交代テンソルを $\boldsymbol{H}=(H_{ij})$ とすれば

(7)　$$H_{ij}=\varepsilon_{ijk}h_k, \qquad h_i=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}H_{jk}$$

であり，$\boldsymbol{H}$ は極性テンソルである．この $\boldsymbol{H}$ を**磁場テンソル**という．

$$\begin{aligned}(\nabla\times\boldsymbol{h})_i=\varepsilon_{ijk}\nabla_j h_k&=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\nabla_j(\varepsilon_{klm}H_{lm})\\&=\frac{1}{2}(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\nabla_j H_{lm}\\&=\frac{1}{2}(\nabla_j H_{ij}-\nabla_j H_{ji})=\nabla_j H_{ij}\end{aligned}$$

である．ゆえに式 (1) は

(8)　$$\nabla_j H_{ij}-\varepsilon_0\frac{\partial E_i}{\partial t}=j_i$$

となる．

また，方程式 (2) は

$$\varepsilon_{ijk}\nabla_j E_k+\frac{\mu_0}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial H_{jk}}{\partial t}=0$$

と表され，これは

(9)　$$\nabla_j E_k-\nabla_k E_j+\mu_0\frac{\partial H_{jk}}{\partial t}=0$$

に同値である．方程式 (4) は

$$\nabla_i h_i=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\nabla_i H_{jk}=0$$

である．縮約されている i, j, k をそれぞれ 1, 2, 3 とおいて，和に書きくだせば ε_{ijk} の定義と H_{ij} の交代性によってこれは

$$\nabla_1 H_{23}+\nabla_2 H_{31}+\nabla_3 H_{12}=0$$

と同じであり，

$$\nabla_i H_{jk}+\nabla_j H_{ki}+\nabla_k H_{ij}=0 \tag{10}$$

と表すことができる．

電場についての波動方程式 (5) は，ベクトル $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{j}$ の成分を用いれば，そのまま

$$\Delta E_j-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_j}{\partial t^2}=\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\nabla_j\rho+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial j_j}{\partial t}\right) \tag{11}$$

と表される．ここで ΔE_j はベクトル場 $\boldsymbol{E}$ に対するラプラシアン

$$\Delta E_j=\nabla_i\nabla_i E_j$$

である．

方程式 (10) の発散を求めれば，偏微分の順序を交換して

$$\nabla_i\nabla_i H_{jk}+\nabla_j\nabla_i H_{ki}+\nabla_k\nabla_i H_{ij}=0$$

ゆえに交代テンソル H_{jk} のラプラシアンは式 (8), (9), (10) を用いて

$$\begin{aligned}\Delta H_{jk}=\nabla_i\nabla_i H_{jk}&=\nabla_k\nabla_i H_{ji}-\nabla_j\nabla_i H_{ki}\\&=\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla_k E_j+\nabla_k j_j-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla_j E_k-\nabla_j j_k\\&=-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}H_{kj}+\nabla_k j_j-\nabla_j j_k\end{aligned}$$

ゆえに方程式

$$\Delta H_{jk}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}H_{jk}=-(\nabla_j j_k-\nabla_k j_j) \tag{12}$$

が成り立つ．これは磁場テンソルを用いて表された波動方程式にほかならない．

直交座標系に関して

$$\Box=\Delta-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{13}$$

で定義される微分演算子を**ダランベリアン**という．これを用いれば，方程式 (11), (12) はそれぞれ

$$\Box E_j = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\nabla_j \rho + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial j_j}{\partial t}\right)$$

$$\Box H_{jk} = -(\nabla_j j_k - \nabla_k j_j)$$

と表されることに注意しよう．

以上の方程式からわかるように，磁場を表す量としては磁場ベクトルよりも磁場テンソルの方が自然である．

いま，時間 t の関数でもあるベクトル場 $\boldsymbol{a} = (a_i)$ とスカラー場 ϕ を用いて，電場ベクトル $\boldsymbol{E}$ と磁場テンソル $\boldsymbol{H}$ が

(14) $$E_i = -\frac{\partial a_i}{\partial t} - \nabla_i \phi$$

(15) $$H_{jk} = \frac{1}{\mu_0}\left(\nabla_j a_k - \nabla_k a_j\right)$$

で表されるとき，ベクトル場 $\boldsymbol{a}$ とスカラー場 ϕ が満たすべき条件を求めよう．これらの式を方程式 (9) の左辺に代入すれば

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla_j a_k - \nabla_k a_j) - \nabla_j \nabla_k \phi + \nabla_k \nabla_j \phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla_j a_k - \nabla_k a_j) = 0$$

となり，方程式 (9) は自動的に満足される．式 (15) の勾配 $\nabla_i H_{jk}$ を計算して循環的に指標を変えて加えれば，式 (10) が自動的に満たされることも容易にわかる．

式 (14),(15) を式 (8) および式 (3) に代入すれば，それぞれ

$$\frac{1}{\mu_0}(\nabla_i \nabla_j a_j - \nabla_j \nabla_j a_i) + \varepsilon_0\left(\frac{\partial^2 a_i}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\nabla_i \phi\right) = j_i,$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\nabla_i a_i - \nabla_i \nabla_i \phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

となる．ここで，ベクトル $\boldsymbol{a}$ とスカラー ϕ についての条件

(16) $$\nabla_j a_j + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

を付加すれば，上の 2 つの方程式は簡単にすることができて，

(17) $$\Box a_i = -\mu_0 j_i, \qquad \Box \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

と書くことができる．条件式 (16) を**ローレンツの関係**という．方程式

(17) の解でローレンツの関係を満たすベクトル場 $\boldsymbol{a}$ とスカラー場 ϕ をそれぞれ電磁場の**ベクトル・ポテンシャル**と**スカラー・ポテンシャル**という.

ψ を点と時間の任意の関数として，ベクトル場 $\boldsymbol{a}=(a_i)$ とスカラー場 ϕ の代りに

$$(18)\qquad \bar{a}_i=a_i+\nabla_i\psi, \qquad \bar{\phi}=\phi-\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

を用いても，式 (14) および (15) で与えられるベクトル場 $\boldsymbol{E}$ とテンソル場 $\boldsymbol{H}$ は変わらない. この電磁ポテンシャルの変換 (18) を**ゲージ変換**という.

問　題

1. マックスウェルの方程式から，電流密度 $\boldsymbol{j}$ について**電荷保存則**の方程式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=\nabla_i j_i+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

を導け.

2. アンペールの法則から磁場についての波動方程式 (6) を導け. それを磁場テンソル $\boldsymbol{H}=(H_{ij})$ を用いて表し，方程式 (12) を導け.

3. 場のエネルギー密度 w は　$w=\dfrac{1}{2}(\varepsilon_0|\boldsymbol{E}|^2+\mu_0|\boldsymbol{h}|^2)$

単位時間のジュール熱は　$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}$

ポインティングのベクトルは　$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{h}$

で定義される. そのとき，次の**エネルギーの保存則**の方程式が成り立つことを証明せよ.

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}+\nabla\cdot\boldsymbol{s}=0$$

4. 位置と時間の関数であるベクトル場 $\boldsymbol{p}=(p_i)$ を用いて

$$\boldsymbol{E}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{p})-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{p}}{\partial t^2}, \qquad \boldsymbol{h}=\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{p})$$

とおくとき，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{h}$ についてマックスウェルの方程式 (1)〜(4) が成立するためには，$\boldsymbol{p}$ が波動方程式

$$\Box\boldsymbol{p}=-\frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{q}, \qquad \boldsymbol{q}=\int\boldsymbol{j}dt$$

を満足すべきことを証明せよ. このとき，$\boldsymbol{p}$ を**ヘルツのベクトル**という.

[解　　答]

1. 任意のベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に対して $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{v})=0$ であるから，アンペールの法則 (1) の両辺の発散をとり，ガウスの定理 (3) を用いれば

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\nabla\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)=\nabla\cdot\boldsymbol{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

2. 式 (1) の両辺の回転をとれば，(2) を用いて

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{h})-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{E}=\nabla\times\boldsymbol{j}$$

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{h})-\Delta\boldsymbol{h}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{h}}{\partial t^2}=\nabla\times\boldsymbol{j}$$

式 (4) を考慮して，これから式 (6) が導かれる．

また，式 (10) から

$$\nabla_i\nabla_i H_{jk}+\nabla_i\nabla_j H_{ki}+\nabla_i\nabla_k H_{ij}=0$$
$$\Delta H_{jk}+\nabla_j\nabla_i H_{ki}-\nabla_k\nabla_i H_{ji}=0$$

式 (8) を代入して

$$\Delta H_{jk}+\nabla_j\left(\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}E_k+j_k\right)-\nabla_k\left(\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}E_j+j_j\right)=0$$

$$\Delta H_{jk}+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla_j E_k-\nabla_k E_j)+(\nabla_j j_k-\nabla_k j_j)=0$$

$$\therefore\quad \Delta H_{jk}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 H_{jk}}{\partial t^2}+(\nabla_j j_k-\nabla_k j_j)=0$$

3. 式 (1), (2) により

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\mu_0\boldsymbol{h}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{h}}{\partial t}=\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{h}-\boldsymbol{j})-\boldsymbol{h}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})$$
$$=-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}+\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{h})-\boldsymbol{h}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})=-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{h})$$

4. 式 (2), (4) は自動的に満足される．$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{h}$ の式を式 (1) に代入すれば

$$\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\{\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{p})-\Delta\boldsymbol{p}\}-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left\{\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{p})-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{p}}{\partial t^2}\right\}=\boldsymbol{j}$$

ゆえに

$$\frac{\partial}{\partial t}\Box\boldsymbol{p}=-\frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{j}\qquad\therefore\quad\Box\boldsymbol{p}=-\frac{1}{\varepsilon_0}\int\boldsymbol{j}dt$$

この式の両辺の発散を求めれば

$$\nabla_j\Box p_j=\Delta\nabla_j p_j-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla_j p_j=\Box(\nabla\cdot\boldsymbol{p})=-\frac{1}{\varepsilon_0}\int\nabla\cdot\boldsymbol{j}dt$$

問題 **1** の電荷保存則の方程式により，方程式

$$\Box(\nabla\cdot\boldsymbol{p})=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\frac{\partial\rho}{\partial t}dt=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

が成り立つ．$\boldsymbol{E}$ の式を式 (3) に代入すれば，この方程式が導かれるから，式 (3) は自動的に満たされている．

§4. 等方テンソル

直交基底 $\Sigma\{e_1, e_2, e_3\}$ から $\Sigma'\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ への直交基底変換が

$$e'_i = a_{ia} e_a$$

であるとき，たとえば4階のテンソル $\boldsymbol{T}$ のそれぞれの基底に関する成分を (T_{abcd}), (T'_{ijkl}) とすれば，その間の変換法則は

$$(1) \qquad T'_{ijkl} = a_{ia} a_{jb} a_{kc} a_{ld} T_{abcd}$$

であった．したがって，一般に基底が異なれば成分の値も異なる．

どのような直交基底に関する成分も直交基底変換によって値が変わらないようなテンソルを**等方テンソル**という．空間における1階から4階までの等方テンソルがどのような式で与えられるかを調べてみよう．

そのために，1つの媒介変数 t に従って，直交基底 $\Sigma'(t)$ が変化し $t=0$ のとき $\Sigma = \Sigma'(0)$ であるとする．直交基底変換の行列を $A(t) = (a_{ij}(t))$ とすれば，直交行列の性質 ${}^tAA = I$ により任意の t に対して

$$(2) \qquad a_{ij}(t) a_{ik}(t) = \delta_{jk}$$

であり，

$$(3) \qquad a_{ij}(0) = \delta_{ij}$$

である．式 (2) を t について微分し，$t=0$ において

$$\left(\frac{da_{ij}}{dt}\right)_{t=0} = \omega_{ij}$$

とおけば

$$(4) \qquad \omega_{kj} + \omega_{jk} = 0$$

である．

一方，4階の等方テンソル $\boldsymbol{T}$ について，その成分は t に独立で $T'_{ijkl} = T_{ijkl}$ であるから，式 (1) を t について微分して $t=0$ とおけば

$$(5) \qquad \omega_{ia} T_{ajkl} + \omega_{ja} T_{iakl} + \omega_{ka} T_{ijal} + \omega_{la} T_{ijka} = 0$$

である．ω_{jk} は関係式 (4) を満たす任意の量すなわち交代な量であるから，問題はそのような任意の量 ω_{jk} に対して，方程式 (5) を満足するテンソル $\boldsymbol{T} = (T_{ijkl})$ の最も一般の形は何かということになる．

ところで，ω_{jk} は交代であるから，3個の成分をもっており，

$$\omega_i=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_{jk} \qquad \text{したがって} \qquad \omega_{jk}=\varepsilon_{ijk}\omega_i$$

とおけば，方程式 (5) は

$$\omega_h(\varepsilon_{hia}T_{ajkl}+\varepsilon_{hja}T_{iakl}+\varepsilon_{hka}T_{ijal}+\varepsilon_{hla}T_{ijka})=0$$

となる．これが交代な ω_{jk} の任意の値，したがって ω_h の任意の値に対して 0 になるから，方程式 (5) は結局

$$\text{(6)} \qquad \varepsilon_{hia}T_{ajkl}+\varepsilon_{hja}T_{iakl}+\varepsilon_{hka}T_{ijal}+\varepsilon_{hla}T_{ijka}=0$$

と同値である．これが等方テンソルが満たすべき代数方程式である．

まず 1 階の等方テンソルすなわち等方ベクトルを (v_i) として，それが何であるかを調べよう．この場合 (6) に相当する方程式は

$$\varepsilon_{hia}v_a=0$$

である．これに ε_{hij} を掛けて h と i について縮約すれば

$$\varepsilon_{hij}\varepsilon_{hia}v_a=2\delta_{ja}v_a=2v_j=0$$

となり，$v_j=0$ である．ゆえに

定理 4.1　零ベクトル以外の等方ベクトルは存在しない．

次に 2 階の等方テンソルを $\boldsymbol{v}=(v_{ij})$ とする．方程式 (6) に相当する式は

$$\varepsilon_{hia}v_{aj}+\varepsilon_{hja}v_{ia}=0$$

である．ε_{hkl} を掛けて h について縮約すれば

$$(\delta_{ki}\delta_{la}-\delta_{ka}\delta_{li})v_{aj}+(\delta_{kj}\delta_{la}-\delta_{ka}\delta_{lj})v_{ia}=0$$

すなわち

$$\delta_{ki}v_{lj}-\delta_{li}v_{kj}+\delta_{kj}v_{il}-\delta_{lj}v_{ik}=0$$

となる．ここで $k=j$ とおいて縮約すれば

$$v_{li}-\delta_{li}v_{jj}+3v_{il}-v_{il}=0$$

ゆえに

$$\text{(7)} \qquad 2v_{il}+v_{li}=v_{jj}\delta_{il}$$

である．ここに v_{jj} はスカラーである．またこの式で i と l を入れ換えれば

$$2v_{li}+v_{il}=v_{jj}\delta_{il}$$

である．この 2 つの式を v_{il} について解けば

$$v_{il}=\frac{1}{3}v_{jj}\delta_{il}$$

となる．ゆえに

定理 4.2 2階の等方テンソル $\boldsymbol{v}=(v_{ij})$ は

$$v_{ij}=\alpha\delta_{ij} \qquad \left(\alpha=\frac{1}{3}v_{jj}\right)$$

の形のものに限る．ここに α はスカラーである．

3階の等方テンソル $\boldsymbol{w}=(w_{ijk})$ について，方程式 (6) は

$$\varepsilon_{hia}w_{ajk}+\varepsilon_{hja}w_{iak}+\varepsilon_{hka}w_{ija}=0$$

となる．ε_{hlm} を掛け h について縮約して整理すれば

$$\delta_{li}w_{mjk}-\delta_{mi}w_{ljk}+\delta_{lj}w_{imk}-\delta_{mj}w_{ilk}+\delta_{lk}w_{ijm}-\delta_{mk}w_{ijl}=0$$

を得る．この式で $k=l$ とおいて縮約すれば

(8) $$2w_{ijm}+w_{mji}+w_{imj}=\delta_{mi}w_{ljl}+\delta_{mj}w_{ill}$$

となり，さらに $i=j$ とおいて縮約すれば

$$w_{llm}=0$$

を得る．縮約する指標をいろいろ変えれば，同様に

$$w_{ill}=w_{ljl}=w_{llk}=0$$

を得る．これを式 (8) に代入して

(9) $$2w_{ijm}+w_{imj}+w_{mji}=0$$

を得る．

式 (9) の指標 i, j, m を循環的に入れ換えて

$$2w_{mij}+w_{mji}+w_{jim}=0$$

$$2w_{jmi}+w_{jim}+w_{imj}=0$$

が得られ，式 (9) とこれらを加えて

(10) $$w_{ijm}+w_{mij}+w_{jmi}+w_{imj}+w_{mji}+w_{jim}=0$$

を得る．一方，式 (9) で j と m，および i と m を入れ換えた式は

$$2w_{imj}+w_{ijm}+w_{jmi}=0$$

$$2w_{mji}+w_{mij}+w_{ijm}=0$$

である．これらの式の和から式 (10) を引けば，

$$w_{imj}+w_{mji}+w_{ijm}=w_{jim}$$

が成り立つ．これと，i と j を入れ換えた式とを式 (10) に代入すれば

(11) $$w_{ijm}+w_{jim}=0$$

すなわち，w_{ijm} は初めの2つの指標について交代である．しかし，式 (11) を導いた縮約する指標の位置を変えれば，以上の論法は他の指標の組についても適用できるから，結局 $\boldsymbol{w}=(w_{ijk})$ はすべての指標について交代，すなわち交代テンソルである．このようなテンソルは

$$w_{ijk}=\alpha\varepsilon_{ijk}$$

の形に表される．ゆえに

定理 4.3　3階の等方テンソル $\boldsymbol{w}=(w_{ijk})$ はエディントンの $\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_{ijk})$ のスカラー倍

$$\boldsymbol{w}=\alpha\boldsymbol{\varepsilon};\qquad w_{ijk}=\alpha\varepsilon_{ijk}$$

で表される．

ただし，逆の向きの直交基底を考えれば，エディントンの $\boldsymbol{\varepsilon}$ は軸性テンソルであるから，α として軸性スカラーをとらなければならない．

4階の等方テンソル $\boldsymbol{T}=(T_{ijkl})$ から，2つの指標について縮約して得られる2階のテンソル，たとえば

$$T_{ajka}$$

は等方テンソルであるから，定理 4.2 により

(12) $$T_{ajka}=\frac{1}{3}T_{abba}\delta_{jk}$$

の形をしている．

方程式 (6) に ε_{hjm} を掛けて h と j に縮約した式を整理したのち，指標 m を j でおき換えれば

$$\begin{aligned}T_{jikl}+2T_{ijkl}+T_{ikjl}+T_{ilkj}\\=\delta_{ij}T_{aakl}+\delta_{jk}T_{iaal}+\delta_{jl}T_{iaka}\end{aligned}$$

を得る．式 (12) を考慮して，

$$T_{aabb}=A,\quad T_{baab}=B,\quad T_{baba}=C$$

とおけば，上の式は

$$T_{ijkl}+T_{jikl}+(T_{ijkl}+T_{ikjl}+T_{ilkj})$$

(13)
$$=\frac{1}{3}(A\delta_{ij}\delta_{kl}+B\delta_{il}\delta_{jk}+C\delta_{ik}\delta_{jl})$$

と書くことができる.

いま，最初の2つの指標について対称であるような4階の等方テンソルを考えよう．そのとき

$$B=C$$

であることに注意して，式（13）とその指標 j, k, l を循環的に入れ換えれば次の3つの方程式を得る.

(14)

$$2T_{ijkl}+(T_{ijkl}+T_{ikjl}+T_{ilkj})=\frac{1}{3}[A\delta_{ij}\delta_{kl}+B(\delta_{il}\delta_{jk}+\delta_{ik}\delta_{jl})]$$

$$2T_{iklj}+(T_{iklj}+T_{ilkj}+T_{ijlk})=\frac{1}{3}[A\delta_{ik}\delta_{lj}+B(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{il}\delta_{kj})]$$

$$2T_{iljk}+(T_{iljk}+T_{ijlk}+T_{ikjl})=\frac{1}{3}[A\delta_{il}\delta_{jk}+B(\delta_{ik}\delta_{lj}+\delta_{ij}\delta_{lk})]$$

これら3つの式の両辺を加えれば

$$3(T_{ijkl}+T_{iklj}+T_{iljk})+2(T_{ijlk}+T_{ikjl}+T_{ilkj})$$

(15)
$$=\left(\frac{1}{3}A+\frac{2}{3}B\right)(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})$$

を得る．この式で k と l を入れ換えた式の左辺は

$$3(T_{ijlk}+T_{ilkj}+T_{ikjl})+2(T_{ijkl}+T_{iljk}+T_{iklj})$$

となり，右辺は同じである．したがって，式（15）の3倍からこの式の2倍を引けば，またその反対の計算を行えば

$$T_{ijkl}+T_{iklj}+T_{iljk}=T_{ijlk}+T_{ikjl}+T_{ilkj}$$

$$=\frac{1}{15}(A+2B)(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})$$

を得る．この第2辺の式を（14）の第1式に代入して

$$3T_{ijkl}-T_{ijlk}=\frac{1}{15}[(4A-2B)\delta_{ij}\delta_{kl}$$

$$+(3B-A)(\delta_{il}\delta_{jk}+\delta_{ik}\delta_{jl})]$$

となる．この式で k と l を入れ換えれば左辺は

$$3T_{ijlk}-T_{ijkl}$$

となり，右辺は同じであるから，T_{ijkl} について解けば

$$8T_{ijkl}=\frac{4}{15}[(4A-2B)\delta_{ij}\delta_{kl}+(3B-A)(\delta_{il}\delta_{jk}+\delta_{ik}\delta_{jl})]$$

を得る．

$$\frac{1}{15}(2A-B)=\alpha,\qquad \frac{1}{30}(3B-A)=\beta$$

とおけば，次のように定理を述べることができる．

定理 4.4　4 階の等方テンソル $\boldsymbol{T}=(T_{ijkl})$ が 2 つの指標について対称ならば，たとえば $T_{ijkl}=T_{jikl}$ ならば，2 つのテンソル

(16)　$$\delta_{ij}\delta_{kl},\qquad \delta_{il}\delta_{jk}+\delta_{ik}\delta_{jl}$$

の 1 次結合で表される．すなわち

(17)　$$T_{ijkl}=\alpha\delta_{ij}\delta_{kl}+\beta(\delta_{il}\delta_{jk}+\delta_{ik}\delta_{jl})$$

の形に表される．ここに α, β はスカラーである．

なお式 (17) から，T_{ijkl} は同時に次のような対称性をもっている．

$$T_{ijkl}=T_{ijlk},\qquad T_{ijkl}=T_{klij}$$

さらに交代性をもつテンソルについて次の定理が証明される（問題 1）．

定理 4.5　4 階の等方テンソル S_{ijkl} が交代性

$$S_{ijkl}=-S_{jikl},\qquad S_{ijkl}=-S_{ijlk}$$

をもつならば，S_{ijkl} は

$$S_{ijkl}=\gamma(\delta_{il}\delta_{jk}-\delta_{ik}\delta_{jl})$$

の形に表される．

任意の 4 階のテンソルは上の交代性をもつテンソル $\boldsymbol{S}$ と 2 つの指標について対称性をもつテンソル $\boldsymbol{T}$ の和で表すことができるから，次の定理を述べることができる．

定理 4.6　4 階の任意の等方テンソルは，

$$\delta_{ij}\delta_{kl},\quad \delta_{ik}\delta_{jl},\quad \delta_{il}\delta_{jk}$$

の 1 次結合として

$$\alpha\delta_{ij}\delta_{kl}+\beta\delta_{ik}\delta_{jl}+\gamma\delta_{il}\delta_{jk}$$

の形に表される．ここに係数 α, β, γ はスカラーである．

§2 で等方性弾性体の弾性テンソル C_{ijkl} を式（17）の形で表した理由はこの定理によっている．

さらに一般の等方テンソルについては，多線形性の不変式論として取り扱う方法がある．

問　　題

1. 定理 4.5 を証明せよ．

［解　　答］

1. 式（13）を定理の交代性をもつテンソル S_{ijkl} で書き直すとき，交代性により

$$S_{ijkl}+S_{jikl}=0, \quad A=S_{aabb}=0, \quad B=S_{baab}=-S_{abab}=-C$$

であるから，式（13）は

$$S_{ijkl}+S_{ikjl}+S_{ilkj}=\frac{B}{3}(\delta_{il}\delta_{jk}-\delta_{ik}\delta_{jl})$$

となる．j, k, l を循環的に入れ換えて得られる式を加え合わせれば，右辺の和は 0 となるから，

$$S_{ikjl}+S_{ilkj}+S_{ijlk}=0$$

を得る．これを上の式に代入すれば

$$S_{ijkl}=\frac{B}{6}(\delta_{il}\delta_{jk}-\delta_{ik}\delta_{jl})$$

と表すことができる．

4 一般のテンソル代数

§1. 反変ベクトル，共変ベクトル

いままで，ベクトルやテンソルを記述するために，空間の中に直交基底をとり，それに関する成分によって表現し，また直交基底を取り換えた場合の成分の間の関係，すなわち成分の変換法則を調べ，さらにどの直交基底にも通用する形でのテンソル解析を行ってきた．

のちに空間内での曲線座標を用いてのテンソル解析を行う準備として，一般の基底を用いた場合に，ベクトルやテンソルがどのように表現されるかを見ることにしよう．

空間の中で互いに1次独立な3個のベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ の組 $\Sigma\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ が与えられたとき，任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ をそれらの1次結合で表すことができる．この意味でベクトルの組 Σ を1つの**基底**という．$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ が単位ベクトルでなくても，あるいは互いに直交していなくてもよいから**斜交基底**ということもある．直交基底に関する成分を (v_1, v_2, v_3) のように下付きの指標で表してきたが，今後ベクトルを扱うとき

$$\boldsymbol{v} = v^1\boldsymbol{e}_1 + v^2\boldsymbol{e}_2 + v^3\boldsymbol{e}_3 \tag{1}$$

のように，ベクトルの成分を上付きの指標で表すのが便利である．これらは $\boldsymbol{v}$ の成分の番号を示すものであって，累乗を表すものではない．これらの成分をまとめて v^i で書き，1つの基底に関して話を進めているとき，簡単に

$$\boldsymbol{v} = (v^i)$$

と書く．

いままで，直交基底に関して，1つの項の中に2度現われている指標については総和をとるという，アインシュタインの総和の規約を用いてきた．しかし

今後一般の基底に関する場合には，1つの項の中で上側と下側とに1度ずつ現われているような指標について総和の規約を適用する．たとえば，ベクトル $\boldsymbol{v}$ について式 (1) は

$$\boldsymbol{v}=v^i\boldsymbol{e}_i$$

と表される．

1つの基底 Σ に関して，2つのベクトルが成分

$$\boldsymbol{v}=(v^i), \qquad \boldsymbol{w}=(w^i)$$

をもつとき，その和およびスカラー倍はそれぞれ

$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=(v^i+w^i)$$

$$k\boldsymbol{v}=(kv^i)$$

で与えられる．

さて，2つの基底 $\Sigma\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$，基底 $\Sigma'\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$ について，その間にどんな関係があり，またそれぞれの基底に関するベクトルの成分の間にどのような関係があるかを見よう．Σ' が基底であるから，基底 Σ のベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ は $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$, $\boldsymbol{e}'_3$ の1次結合として

$$\boldsymbol{e}_1=A^1{}_1\boldsymbol{e}'_1+A^2{}_1\boldsymbol{e}'_2+A^3{}_1\boldsymbol{e}'_3$$

$$\boldsymbol{e}_2=A^1{}_2\boldsymbol{e}'_1+A^2{}_2\boldsymbol{e}'_2+A^3{}_2\boldsymbol{e}'_3$$

$$\boldsymbol{e}_3=A^1{}_3\boldsymbol{e}'_1+A^2{}_3\boldsymbol{e}'_2+A^3{}_3\boldsymbol{e}'_3$$

と表される．これらを一まとめにして

(2) $$\boldsymbol{e}_i=A^a{}_i\boldsymbol{e}'_a \qquad (i=1, 2, 3;\ a=1, 2, 3)$$

と書くことができる．もちろん指標 a については総和をとっている．$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ は互いに1次独立であるから，行列

$$A=(A^a{}_i)=\begin{pmatrix} A^1{}_1 & A^1{}_2 & A^1{}_3 \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 & A^2{}_3 \\ A^3{}_1 & A^3{}_2 & A^3{}_3 \end{pmatrix}$$

は正則である．

A の逆行列を

$$A^{-1}=(\overline{A}^i{}_a)=\begin{pmatrix}\overline{A}^1{}_1 & \overline{A}^1{}_2 & \overline{A}^1{}_3\\ \overline{A}^2{}_1 & \overline{A}^2{}_2 & \overline{A}^2{}_3\\ \overline{A}^3{}_1 & \overline{A}^3{}_2 & \overline{A}^3{}_3\end{pmatrix}$$

とする．そのとき関係式

$$AA^{-1}=I, \qquad A^{-1}A=I$$

が成り立つ．これを $A^a{}_i$, $\overline{A}^i{}_a$ を用いて書きくだせば

(3) $$A^a{}_i\overline{A}^i{}_b=\delta_b{}^a, \qquad \overline{A}^i{}_aA^a{}_j=\delta_j{}^i$$

と表すことができる．式 (2) に $\overline{A}^i{}_b$ を掛けて i について1から3までの和をとれば

$$\overline{A}^i{}_b\boldsymbol{e}_i=\overline{A}^i{}_bA^a{}_i\,\boldsymbol{e}'_a=\delta_b{}^a\boldsymbol{e}'_a=\boldsymbol{e}'_b$$

であるから

(4) $$\boldsymbol{e}'_b=\overline{A}^i{}_b\boldsymbol{e}_i$$

となる．これは Σ' の基本ベクトルを Σ の基本ベクトルの1次結合で表した式である．関係式 (2) および (4) を**基底の変換**という．

逆に，任意の正則行列 $A=(A^a{}_i)$ とこの逆行列 $A^{-1}=(\overline{A}^i{}_a)$ が与えられたとき，式 (4) で定められるベクトル $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$, $\boldsymbol{e}'_3$ は互いに1次独立であり，それらは1つの基底 $\Sigma'\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$ を構成する．

ベクトル $\boldsymbol{v}$ が Σ および Σ' に関してそれぞれ成分 (v^i), (v'^a) をもつとする．そのとき

(5) $$\boldsymbol{v}=v^i\boldsymbol{e}_i=v'^a\boldsymbol{e}'_a$$

であるから，$\boldsymbol{e}_i$ に式 (2) を代入すれば

$$v^iA^a{}_i\,\boldsymbol{e}'_a=v'^a\boldsymbol{e}'_a$$

となる．$\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$, $\boldsymbol{e}'_3$ は1次独立であるから，両辺の係数を比較して

(6) $$v'^a=A^a{}_iv^i$$

を得る．また式 (5) の $\boldsymbol{e}'_a$ に (4) を代入して，$\boldsymbol{e}_i$ の係数を比較すれば

(7) $$v^i=\overline{A}^i{}_av'^a$$

を得る．これらの式 (6), (7) を基底の変換 (2), (4) による**ベクトル $\boldsymbol{v}$ の成分の変換法則**という．

第1章 §2 で，ベクトルを変数とする多線形関数をテンソルと定義した．そして1つのベクトル自体が，内積を媒介にして，ベクトル変数の線形関数であることを見てきた．ここで後半の線形関数という性質だけに注目して，それがどのような量であるかを見ることにしよう．

いま，任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して実数値を定める関数

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{v})$$

が線形性

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{v})+\boldsymbol{a}(\boldsymbol{w})$$

$$\boldsymbol{a}(k\boldsymbol{v})=k\boldsymbol{a}(\boldsymbol{v})$$

をもつとする．

基底 Σ に関してベクトル $\boldsymbol{v}$ が成分 (v^i) をもつとき，

$$\boldsymbol{v}=v^i\boldsymbol{e}_i=v^1\boldsymbol{e}_1+v^2\boldsymbol{e}_2+v^3\boldsymbol{e}_3$$

を $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{v})$ に代入すれば，線形性により

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{v})&=\boldsymbol{a}(v^1\boldsymbol{e}_1+v^2\boldsymbol{e}_2+v^3\boldsymbol{e}_3)\\&=\boldsymbol{a}(v^1\boldsymbol{e}_1)+\boldsymbol{a}(v^2\boldsymbol{e}_2)+\boldsymbol{a}(v^3\boldsymbol{e}_3)\\&=v^1\boldsymbol{a}(\boldsymbol{e}_1)+v^2\boldsymbol{a}(\boldsymbol{e}_2)+v^3\boldsymbol{a}(\boldsymbol{e}_3)\\&=v^i\boldsymbol{a}(\boldsymbol{e}_i)\end{aligned}$$

となる．ゆえに基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ に対する $\boldsymbol{a}$ の値を

$$(8)\qquad \boldsymbol{a}(\boldsymbol{e}_i)=\alpha_i\qquad (i=1,2,3)$$

とおけば，

$$(9)\qquad \boldsymbol{a}(\boldsymbol{v})=\alpha_i v^i$$

と書くことができる．すなわち，ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ に対する $\boldsymbol{a}$ の値 α_i を知れば，1次関数 (9) によって任意のベクトル $\boldsymbol{v}=(v^i)$ に対する値を知ることができる．

しかし (α_i) は基底 $\Sigma\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ に関して定まる値であるから，他の基底 Σ' に関してはどのようになるかを調べよう．

$$\alpha'_a=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{e}'_a)$$

とおき，式 (4) を代入すれば線形性により

$$\alpha'_a=\boldsymbol{a}(\overline{A}^i{}_a\boldsymbol{e}_i)=\overline{A}^i{}_a\boldsymbol{a}(\boldsymbol{e}_i)=\overline{A}^i{}_a\alpha_i$$

すなわち

(10)
$$\alpha'_a = \overline{A}^i{}_a \alpha_i$$

同様にして

(11)
$$\alpha_i = A^a{}_i \alpha'_a$$

を得る.

この変換法則を (6) あるいは (7) と対照すれば，ベクトルの成分の変換法則と相反的な関係にあり，むしろ基底の変換 (4), (2) に類似している. このような線形関数 $\boldsymbol{\alpha}$ を**共変ベクトル**といい, (α_i) あるいは (α'_a) をそれぞれの基底 Σ, Σ' に関する $\boldsymbol{\alpha}$ の**成分**という. 式 (10) および (11) を**共変ベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ の成分の変換法則**という.

共変ベクトルに対して，ベクトル $\boldsymbol{v}=(v^i)$ のようにその成分の変換法則が (6), (7) であるベクトルを**反変ベクトル**という.

直交基底だけを考えている場合は，直交基底 Σ から Σ' への変換の行列 A が直交行列であり，

$$A^{-1} = {}^tA$$

である. この場合 $A^a{}_i = a_{ai}$ とおけば, $\overline{A}^i{}_a = A^a{}_i = a_{ai}$ であるから，共変ベクトルの変換法則 (10) は

$$\alpha'_a = \overline{A}^i{}_a \alpha_i = \sum_{i=1}^{3} a_{ai} \alpha_i = \sum_{i=1}^{3} A^a{}_i \alpha_i$$

となる. これは反変ベクトルの成分の変換法則 (6) と同一であり，直交基底だけを対象とする場合には，反変性と共変性の区別をする必要がないことを示している. テンソルについても同じ事情が生ずることは次第にわかる. これが前章までで取り扱ったベクトルやテンソルをとくに直交テンソルと呼んだ理由である. しかし，今後一般の基底に関してテンソルを定義するとき，反変性と共変性とを区別する必要があることを知るであろう.

2つの共変ベクトル $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ について，その和 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ およびスカラー倍 $k\boldsymbol{\alpha}$ を次のように定義する. それらは任意の反変ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して

$$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{v})$$
$$(k\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{v})$$

であるような，線形関数 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ および $k\boldsymbol{\alpha}$ である．和 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ が線形性をもつことは，任意の反変ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ に対して，上の定義と $\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\beta}$ の線形性により

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) &= \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})+\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \\ &= \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{v})+\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{w})+\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{v})+\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{w}) \\ &= (\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{w})\end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})(k\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{\alpha}(k\boldsymbol{v})+\boldsymbol{\beta}(k\boldsymbol{v}) \\ &= k\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{v})+k\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{v}) \\ &= k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{v})\end{aligned}$$

であることからわかる．

基底 Σ に関して成分が

$$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_i), \qquad \boldsymbol{\beta}=(\beta_i)$$

であるとき，和 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ の成分は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ に対する値であるから，

$$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{e}_i)+\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{e}_i)=\alpha_i+\beta_i$$

である．すなわち和の成分は対応する成分の和

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(\alpha_i+\beta_i)$$

である．スカラー倍についても同様に

$$k\boldsymbol{\alpha}=(k\alpha_i)$$

である．したがって，共変ベクトルについても，和およびスカラー倍をいままでと同じように，1つの基底に関する成分の和およびスカラー倍で計算することができる．任意の反変ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して値が0であるような共変ベクトルを**零共変ベクトル**といい，$\boldsymbol{0}$ で表すことにする．その成分は (0, 0, 0) である．

共変ベクトルは基底 Σ の基本ベクトルに対する値を与えれば定まるから，

$$(12) \qquad \begin{array}{lll} \boldsymbol{f}^1(\boldsymbol{e}_1)=1, & \boldsymbol{f}^1(\boldsymbol{e}_2)=0, & \boldsymbol{f}^1(\boldsymbol{e}_3)=0 \\ \boldsymbol{f}^2(\boldsymbol{e}_1)=0, & \boldsymbol{f}^2(\boldsymbol{e}_2)=1, & \boldsymbol{f}^2(\boldsymbol{e}_3)=0 \\ \boldsymbol{f}^3(\boldsymbol{e}_1)=0, & \boldsymbol{f}^3(\boldsymbol{e}_2)=0, & \boldsymbol{f}^3(\boldsymbol{e}_3)=1 \end{array}$$

であるような3個の共変ベクトル $\boldsymbol{f}^1, \boldsymbol{f}^2, \boldsymbol{f}^3$ を考えよう．これらの成分は

$$\boldsymbol{f}^1=(1,\ 0,\ 0)$$
$$\boldsymbol{f}^2=(0,\ 1,\ 0)$$
$$\boldsymbol{f}^3=(0,\ 0,\ 1)$$

である．上の関係式（12）は一まとめに

$$\boldsymbol{f}^i(\boldsymbol{e}_j)=\delta_j{}^i$$

と表される．共変ベクトル $\boldsymbol{a}=(\alpha_i)$ に対して1次結合

$$\alpha_i\boldsymbol{f}^i=\alpha_1\boldsymbol{f}^1+\alpha_2\boldsymbol{f}^2+\alpha_3\boldsymbol{f}^3 \tag{13}$$

を考えれば，基本ベクトル $\boldsymbol{e}_j$ に対して

$$\alpha_i\boldsymbol{f}^i(\boldsymbol{e}_j)=\alpha_i\delta_j{}^i=\alpha_j \qquad (j=1,\ 2,\ 3)$$

である．ゆえにこの線形関数としての共変ベクトル(13) は $\boldsymbol{a}$ に一致する．

$$\boldsymbol{a}=\alpha_i\boldsymbol{f}^i \tag{14}$$

また $\boldsymbol{f}^1,\ \boldsymbol{f}^2,\ \boldsymbol{f}^3$ の1次結合が零共変ベクトル，すなわち

$$\gamma_1\boldsymbol{f}^1+\gamma_2\boldsymbol{f}^2+\gamma_3\boldsymbol{f}^3=\boldsymbol{0}$$

ならば，基本ベクトルに対する値を調べて

$$\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=0$$

であることがわかる．すなわち $\boldsymbol{f}^1,\ \boldsymbol{f}^2,\ \boldsymbol{f}^3$ は互いに1次独立である．これはちょうど，これらの共変ベクトルの組 Σ^* $\{\boldsymbol{f}^1,\ \boldsymbol{f}^2,\ \boldsymbol{f}^3\}$ が共変ベクトルに対する1つの基底をなしており，また式（14）で見るように，共変ベクトルの成分はそれを $\boldsymbol{f}^1,\ \boldsymbol{f}^2,\boldsymbol{f}^3$ の1次結合として表したときの係数である．$\boldsymbol{f}^1,\ \boldsymbol{f}^2,\ \boldsymbol{f}^3$ は基底 Σ に対して式（12）で特徴づけられる共変ベクトルであるから，基底 Σ^* を基底 Σ の**双対基底**という．

反変ベクトル $\boldsymbol{v}=(v^i)$ と共変ベクトル $\boldsymbol{a}=(\alpha_i)$ について

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{v})=\alpha_iv^i$$

であるから，いま $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{a}$ との役割を入れ換えて，$\boldsymbol{v}$ を共変ベクトル $\boldsymbol{a}$ を変数とした線形関数

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{a})=v^i\alpha_i$$

と考えることができる．このように，本節でいままで行ってきた議論で，反変ベクトルと共変ベクトルの立場を全く入れ換えて行えば，共変ベクトルから出発して反変ベクトルを構成することができる．この性質をこれら2種類のベク

トルの**双対性**という． 第1章 §8 で述べたベクトルの系 $\Sigma\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ に対する相反系 $\Sigma^*\{\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{c}^*\}$ は Σ の双対基底のベクトルを直交ベクトルと考えたものになっている．

ベクトルの成分を並べて行列として表すとき，反変ベクトルは列ベクトルで，共変ベクトルは行ベクトルで表すことが多い．たとえば

$$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$$

である． 一方， 基底 Σ とその双対基底 Σ^* のベクトルを並べて作られる行列をそれぞれ

$$(\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \quad \boldsymbol{e}_3), \qquad \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}^1 \\ \boldsymbol{f}^2 \\ \boldsymbol{f}^3 \end{pmatrix}$$

の形に書けば，反変ベクトルと共変ベクトルは行列の積を用いて

$$\boldsymbol{v}=v^i\boldsymbol{e}_i=(\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \quad \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha}=\alpha_i\boldsymbol{f}^i=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\begin{pmatrix} \boldsymbol{f}^1 \\ \boldsymbol{f}^2 \\ \boldsymbol{f}^3 \end{pmatrix}$$

の形に書くことができる．また

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\alpha})=\alpha_i v^i=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}$$

であり，基底 Σ と Σ^* の双対性は

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{f}^1 \\ \boldsymbol{f}^2 \\ \boldsymbol{f}^3 \end{pmatrix}(\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \quad \boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

の形に表される．

基底の変換式（2）および（4）は

$$(\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \quad \boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{e}'_1 \quad \boldsymbol{e}'_2 \quad \boldsymbol{e}'_3)A$$

$$(\boldsymbol{e}'_1 \quad \boldsymbol{e}'_2 \quad \boldsymbol{e}'_3) = (\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \quad \boldsymbol{e}_3)A^{-1}$$

であり，反変ベクトルの成分の変換法則（6),（7）はそれぞれ

$$\begin{pmatrix} v'^1 \\ v'^2 \\ v'^3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} v'^1 \\ v'^2 \\ v'^3 \end{pmatrix}$$

であり，共変ベクトルの成分の変換法則（10),（11）を

$$(\alpha'_1,\ \alpha'_2,\ \alpha'_3) = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)A^{-1}, \qquad (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3) = (\alpha'_1,\ \alpha'_2,\ \alpha'_3)A$$

と書くことができる．これらは具体的な式の計算の場合に有用である．

例 1.1　基底 $\Sigma\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ と $\Sigma'\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$ との変換が

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}'_1 + 2\boldsymbol{e}'_2 + 3\boldsymbol{e}'_3 \\ \boldsymbol{e}_2 = 2\boldsymbol{e}'_1 - \boldsymbol{e}'_2 + 2\boldsymbol{e}'_3 \\ \boldsymbol{e}_3 = -4\boldsymbol{e}'_1 + 2\boldsymbol{e}'_2 - 5\boldsymbol{e}'_3 \end{cases}$$

であるとき，

（1） Σ に関する成分が $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である反変ベクトル $\boldsymbol{v}$ の Σ' に関する成分を求めよ．

（2） Σ に関する成分が（2, 1, −4）である共変ベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ の Σ' に関する成分を求めよ．

（3） Σ に関して成分が $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta} = (-5,\ 3,\ 1)$ である反変ベクトル $\boldsymbol{w}$ と共変ベクトル $\boldsymbol{\beta}$ の Σ' に関する成分を求めよ．

［解］（1）

$$\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$$

であるから，これに基底の変換式を代入し，$\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3$ について整理すれば

$$\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{e}'_1 + 6\boldsymbol{e}'_2 + 8\boldsymbol{e}'_3$$

であるから，Σ' に関して

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v'^1 \\ v'^2 \\ v'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

である．また，基底の変換の行列は

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 2 & -5\end{pmatrix}$$

であるから，

$$\begin{pmatrix}v'^1\\ v'^2\\ v'^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 6\\ 8\end{pmatrix}$$

を得ることができる．

（2） $\alpha_1=\boldsymbol{\alpha}(e_1)=2,\quad \alpha_2=\boldsymbol{\alpha}(e_2)=1,\quad \alpha_3=\boldsymbol{\alpha}(e_3)=-4$

であり，これに変換式を代入して $\boldsymbol{\alpha}$ の線形性を考慮すれば，$\alpha'_1=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{e}'_1)$，$\alpha'_2=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{e}'_2)$，$\alpha'_3=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{e}'_3)$ について方程式

$$\begin{cases}\alpha'_1+2\alpha'_2+3\alpha'_3=2\\ 2\alpha'_1-\alpha'_2+2\alpha'_3=1\\ -4\alpha'_1+2\alpha'_2-5\alpha'_3=-4\end{cases}$$

を得る．これを α'_1, α'_2, α'_3 について解けばよい．この方程式を行列の形で表せば

$$(\alpha'_1,\ \alpha'_2,\ \alpha'_3)\begin{pmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 2 & -5\end{pmatrix}=(2,\ 1,\ -4)$$

であり，A の逆行列は

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 16 & 7 & -10\\ 7 & 4 & -5\end{pmatrix}$$

で与えられるから，

$$(\alpha'_1,\ \alpha'_2,\ \alpha'_3)=(2,\ 1,\ -4)A^{-1}=\frac{1}{5}(2,\ 1,\ -4)\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 16 & 7 & -10\\ 7 & 4 & -5\end{pmatrix}$$

$$=(-2,\ -1,\ 2)$$

（3） (1), (2) と同様にして

$$\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}w'^1\\ w'^2\\ w'^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\ 3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ -11\\ -14\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}=(\beta'_1,\ \beta'_2,\ \beta'_3)=\frac{1}{5}(-5,\ 3,\ 1)\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 16 & 7 & -10\\ 7 & 4 & -5\end{pmatrix}=(10,\ 3,\ -7)$$

この例のように，1つの基底に関して反変ベクトルと共変ベクトルが同じ成分をもっていても，一般に他の基底に関しては異なる成分をもっている．

問　　題

1. 基底 $\Sigma\{e_1, e_2, e_3\}$, $\Sigma'\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ の双対基底をそれぞれ $\Sigma^*\{f^1, f^2, f^3\}$, $\Sigma'^*\{f'^1, f'^2, f'^3\}$ とする. Σ と Σ' の変換式が (2) であるとき, Σ^* と Σ'^* との間の変換式を求めよ.

2. 基底 $\Sigma\{e_1, e_2, e_3\}$ と $\Sigma'\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ の変換式が

$$\begin{cases} e_1 = 2e'_1 + e'_2 + e'_3 \\ e_2 = e'_1 - e'_2 + 3e'_3 \\ e_3 = e'_1 + e'_2 - e'_3 \end{cases}$$

であるとき,

(1) それぞれの双対基底 Σ^* と Σ'^* の変換式を求めよ.

(2) 基底 Σ に関する成分が $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ である反変ベクトル $\boldsymbol{v}$ の Σ' に関する成分を求めよ.

(3) Σ に関する成分が $(2, -5, 3)$ である共変ベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ の Σ' に関する成分を求めよ.

(4) Σ に関して成分が $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta} = (1, 4, -2)$ である反変ベクトル $\boldsymbol{w}$ と共変ベクトル $\boldsymbol{\beta}$ の Σ' に関する成分を求めよ.

[解　　答]

1. Σ' と Σ'^* の双対性は

$$f'^a(e'_b) = \delta_b{}^a$$

である. 基底の変換が式 (2) で与えられたとき, 式 (4) が成り立つから, 式 (4) を上式に代入し, f'^a の線形性に注意すれば

$$\overline{A}^j{}_b f'^a(e_j) = \delta_b{}^a$$

となる. これに $A^b{}_i$ を掛けて b について縮約すれば

$$f'^a(e_i) = A^a{}_i$$

を得る. これは共変ベクトル f'^a の Σ に関する成分が $(A^a{}_1, A^a{}_2, A^a{}_3)$ であることを示している. ゆえに f'^a は, Σ^* の基本ベクトル f^i の1次結合として,

$$f'^a = A^a{}_i f^i$$

と表される. あるいは, 逆に

$$f^i = \overline{A}^i{}_a f'^a$$

が成り立つ．これらが共変ベクトルの基底 Σ^* と Σ'^* の間の変換式である．

2. 基底変換の行列 A とその逆行列 A^{-1} はそれぞれ

$$A=(A^{\alpha}{}_i)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix},\qquad A^{-1}=(\overline{A}^i{}_{\alpha})=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 4 & 2\\ 2 & -3 & -1\\ 4 & -5 & -3\end{pmatrix}$$

であるから，問題 **1** の結果により

(1)
$$\begin{cases} f'^1=2f^1+\ f^2+f^3\\ f'^2=\ f^1-\ f^2+f^3\\ f'^3=\ f^1+3f^2-f^3\end{cases}\qquad \begin{cases} f^1=\ -f'^1+2f'^2+\ f'^3\\ f^2=\dfrac{1}{2}(2f'^1-3f'^2-\ f'^3)\\ f^3=\dfrac{1}{2}(4f'^1-5f'^2-3f'^3)\end{cases}$$

(2)
$$v=\begin{pmatrix}v'^1\\ v'^2\\ v'^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ -1\\ 9\end{pmatrix}$$

(3)
$$\alpha=(\alpha'_1,\ \alpha'_2,\ \alpha'_3)=\frac{1}{2}(2,\ -5,\ 3)\begin{pmatrix}-2 & 4 & 2\\ 2 & -3 & -1\\ 4 & -5 & -3\end{pmatrix}=(-1,\ 4,\ 0)$$

(4)
$$w=\begin{pmatrix}w'^1\\ w'^2\\ w'^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 4\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ -5\\ 15\end{pmatrix}$$

$$\beta=(\beta'_1,\ \beta'_2,\ \beta'_3)=\frac{1}{2}(1,\ 4,\ -2)\begin{pmatrix}-2 & 4 & 2\\ 2 & -3 & -1\\ 4 & -5 & -3\end{pmatrix}=(-1,\ 1,\ 2)$$

§2. テンソル

第1章 §2 で，2個のベクトル変数の関数で各変数について線形性をもつ量を2階のテンソルと定義した．ここで，2個の反変ベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ を変数とする線形関数

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})$$

を考えよう．これは任意の反変ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ について双線形性

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{v})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{v})+\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{v})$$
$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}_1)+\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}_2)$$
$$\boldsymbol{T}(k\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})=k\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})$$
$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\ k\boldsymbol{v})=k\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})$$

を満たしているものとする．

基底 $\Sigma\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$ の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{e}_j$ に対する $\boldsymbol{T}$ の値を

$$(1)\qquad \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = T_{ij}$$

とおけば，前節の共変ベクトルと同じように，あるいは第1章 §3 の式 (2) の計算と類似な方法により，任意の反変ベクトル

$$\boldsymbol{u} = u^i \boldsymbol{e}_i, \qquad \boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{e}_i \quad (= v^j \boldsymbol{e}_j \text{ としてよい})$$

に対して

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = T_{ij} u^i v^j$$

である．すなわち $\boldsymbol{T}$ は $3^2 = 9$ 個の数の組 (T_{ij}) で定まるから，これを $\boldsymbol{T}$ の基底 Σ に関する**成分**という．

異なる基底 $\Sigma'\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$ に関する成分は

$$T'_{ab} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}'_a, \boldsymbol{e}'_b)$$

で与えられる．§1 の基底の変換式 (4) をこの式に代入すれば，$\boldsymbol{T}$ の双線形性により関係式

$$(2)\qquad \begin{aligned} T'_{ab} &= \boldsymbol{T}(\overline{A}^i{}_a \boldsymbol{e}_i \ \ \overline{A}^j{}_b \boldsymbol{e}_j) = \overline{A}^i{}_a \overline{A}^j{}_b \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) \\ &= \overline{A}^i{}_a \overline{A}^j{}_b T_{ij} \end{aligned}$$

を得る．これは §1 の共変ベクトルの成分の変換法則 (10) を 2 重にした形をしている．このような成分の変換法則をもつ線形関数 $\boldsymbol{T}$ を **2 階の共変テンソル**という．

2階の共変テンソルはしばしば成分の行列

$$T = (T_{ij}) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

で表される．そのとき，成分の変換法則 (2) を

$$(T'_{ab}) = {}^t A^{-1} (T_{ij}) A^{-1}$$

と書くことができる．したがって

$$(T_{ij}) = {}^t A (T'_{ab}) A$$

である．

反変ベクトルを共変ベクトルの線形関数と考えたように，2個の共変ベクトル $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ を変数とする線形関数

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$$

を考えよう．共変ベクトルに対して Σ の双対基底 $\Sigma^*\{\boldsymbol{f}^1, \boldsymbol{f}^2, \boldsymbol{f}^3\}$ が基底をなすから，

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{f}^i, \boldsymbol{f}^j) = H^{ij}$$

とおけば，任意の共変ベクトル

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_i \boldsymbol{f}^i, \qquad \boldsymbol{\beta} = \beta_i \boldsymbol{f}^i (= \beta_j \boldsymbol{f}^j)$$

に対して，$\boldsymbol{H}$ の双線形性により

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = H^{ij}\alpha_i\beta_j$$

である．この9個の数 (H^{ij}) を基底 Σ に関する $\boldsymbol{H}$ の**成分**という．

他の基底 Σ' の双対基底 $\Sigma'^*\{\boldsymbol{f}'^1, \boldsymbol{f}'^2, \boldsymbol{f}'^3\}$ に関して

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{f}'^a, \boldsymbol{f}'^b) = H'^{ab}$$

とおき，これに双対基底の変換式（§1 の問題 **1**）を代入すれば

(3) $$H'^{ab} = A^a{}_i A^b{}_j H^{ij}$$

を得る．このような成分の変換法則をもつ線形関数を**2階の反変テンソル**という．2階の反変テンソルも成分の行列

$$\boldsymbol{H} = (H^{ij}) = \begin{pmatrix} H^{11} & H^{12} & H^{13} \\ H^{21} & H^{22} & H^{23} \\ H^{31} & H^{32} & H^{33} \end{pmatrix}$$

で表されることが多い．そのとき成分の変換法則 (3) は

$$(H'^{ab}) = A(H^{ij})^t A$$

で表される．

テンソルの共変性と反変性は，線形関数の記号（上記の $\boldsymbol{T}$ や $\boldsymbol{H}$）ではそれが反変ベクトルを変数とするか共変ベクトルを変数とするかによって判別しなければならない．一方，成分による記号（T_{ij} や H^{ij}）は個々の基底に関して表され，基底変換によってそれぞれ変換法則 (2), (3) に従うものであるが，指標が下付きか上付きかによって区別され，馴れてくれば見易い記号である．

次に反変ベクトルの線形変換

$$P(\boldsymbol{v})$$

を考えよう．これは任意の反変ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対してある反変ベクトル $P(\boldsymbol{v})$

を対応させ，線形性

$$(4)\quad \begin{aligned} P(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)&=P(\boldsymbol{v}_1)+P(\boldsymbol{v}_2)\\ P(k\boldsymbol{v})&=kP(\boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

をもつ変換である．1つの基底 Σ に関して

$$\boldsymbol{v}=v^j\boldsymbol{e}_j$$

であるとき，線形性により

$$P(\boldsymbol{v})=v^jP(\boldsymbol{e}_j)$$

である．ゆえに，基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ の像 $P(\boldsymbol{e}_1)$, $P(\boldsymbol{e}_2)$, $P(\boldsymbol{e}_3)$ がわかれば，任意の反変ベクトルに対する像もわかる．これらの像を基本ベクトルの1次結合として

$$(5)\quad P(\boldsymbol{e}_j)=P^i{}_j\,\boldsymbol{e}_i$$

とおけば，

$$P(\boldsymbol{v})=v^jP^i{}_j\,\boldsymbol{e}_i$$

である．

異なる基底 $\Sigma'\{\boldsymbol{e}'_1,\ \boldsymbol{e}'_2,\ \boldsymbol{e}'_3\}$ について

$$P(\boldsymbol{e}'_b)=P'^a{}_b\boldsymbol{e}'_a$$

とし，(5) に §1 の基底の変換式 (2) を代入すれば

$$P(A^b{}_j\,\boldsymbol{e}'_b)=P^i{}_jA^a{}_i\,\boldsymbol{e}'_a$$

ゆえに

$$A^b{}_jP'^a{}_b\,\boldsymbol{e}'_a=P^i{}_jA^a{}_i\,\boldsymbol{e}'_a$$

であるから，$\boldsymbol{e}'_a$ の係数を比較して

$$A^b{}_jP'^a{}_b=P^i{}_jA^a{}_i$$

を得る．これに $\overline{A}^j{}_c$ を掛けて j について縮約すれば，

$$P'^a{}_b=A^a{}_i\overline{A}^j{}_bP^i{}_j$$

となる．この変換法則は反変ベクトルと共変ベクトルの変換法則を合わせた形をなしており，このような線形変換 P を1階反変，1階共変の**混合テンソル**といい，$(P^i{}_j)$ を基底 Σ に関する P の**成分**という．

混合テンソルを次のような双線形性をもつ関数と考えることができる．任意の反変ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して $P(\boldsymbol{v})$ が反変ベクトルであるから，$P(\boldsymbol{v})$ を任意の共

変ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対する線形関数として考えることができ，それを

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) = \{P(\boldsymbol{v})\}(\boldsymbol{a})$$

とおく．このとき $\boldsymbol{P}$ は変数としての共変ベクトル $\boldsymbol{a}$, 反変ベクトル $\boldsymbol{v}$ のそれぞれについて線形性

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{v}), \qquad \boldsymbol{P}(k\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}_1) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}_2), \qquad \boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}, k\boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})$$

をもっている．基底 Σ とその双対基底 Σ^* の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_j$, $\boldsymbol{f}^i$ に対して，(5) により

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{f}^i, \boldsymbol{e}_j) = \{P(\boldsymbol{e}_j)\}(\boldsymbol{f}^i) = (P^k{}_j\,\boldsymbol{e}_k)(\boldsymbol{f}^i)$$
$$= P^k{}_j\,\boldsymbol{e}_k(\boldsymbol{f}^i) = P^k{}_j\delta_k{}^i = P^i{}_j$$

であり，反変テンソルや共変テンソルの場合と同様に，P の成分は基本ベクトルに対する値である．

逆に，共変ベクトル $\boldsymbol{a}$ と反変ベクトル $\boldsymbol{v}$ について双線形性をもつ関数

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) = P^i{}_j\alpha_i v^j$$

が与えられたとする．1つの反変ベクトル $\boldsymbol{v}$ を固定して，$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})$ を任意の共変ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して実数を定める線形関数と考えれば，$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})$ は1つの反変ベクトルを定義する．この反変ベクトルは $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{v}$ によって定まるものであるから $P(\boldsymbol{v})$ と書く．すなわち，$P(\boldsymbol{v})$ を

$$\{P(\boldsymbol{v})\}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})$$

と定義する．そのとき $P(\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{v}$ について線形性 (4) をもつことが証明される．ゆえに双線形性をもつ関数 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})$ は線形変換 P を定義する．いい替えれば，$\boldsymbol{P}$ を1階反変1階共変の混合テンソルと考えることができる．今後一般に $\boldsymbol{P} = (P^i{}_j)$ に対応する線形変換を P で表す．

以上は，2個のベクトルを変数とした双線形関数を考えたが，さらに多数のベクトルを変数とする多線形性をもつ関数によって，階数の高いテンソルを定義することができる．定義の仕方は2階の場合と同様であるので，3階のテンソルについて簡単に述べよう．3個の反変ベクトル変数 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ の多線形関数

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$$

を **3 階の共変テンソル**という．それは基底 Σ の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ に対する値によって定まるから

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k) = T_{ijk}$$

とおき，この $3^3 = 27$ 個の数をその共変テンソルの基底 Σ に関する**成分**という．他の基底 Σ' に関する成分を

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}'_a, \boldsymbol{e}'_b, \boldsymbol{e}'_c) = T'_{abc}$$

とするとき，基底の変換式によって関係式

$$T'_{abc} = \overline{A}^i{}_a \overline{A}^j{}_b \overline{A}^k{}_c T_{ijk} \tag{6}$$

が成り立つ．逆に表せば

$$T_{ijk} = A^a{}_i A^b{}_j A^c{}_k T'_{abc}$$

である．これを3階の**共変テンソルの成分の変換法則**という．

3 個の共変ベクトル $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ を変数とする多線形関数

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$$

を **3 階の反変テンソル**という．基底 Σ の双対基底 Σ^* の基本ベクトル $\boldsymbol{f}^1, \boldsymbol{f}^2, \boldsymbol{f}^3$ に対する値

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{f}^i, \boldsymbol{f}^j, \boldsymbol{f}^k) = H^{ijk}$$

をその反変テンソルの基底 Σ に関する**成分**という．他の基底 Σ' に関する成分を H'^{abc} とすれば，関係式

$$H'^{abc} = A^a{}_i A^b{}_j A^c{}_k H^{ijk} \tag{7}$$

が成り立ち，これを**反変テンソルの成分の変換法則**という．

また 1 個の共変ベクトル変数 $\boldsymbol{\alpha}$ と 2 個の反変ベクトル変数 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ の多線形関数

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

を1階反変2階共変の**混合テンソル**という．基底 Σ とその双対基底 Σ^* のベクトルに対して

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{f}^i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k) = P^i{}_{jk}$$

とおくとき，これを混合テンソル $\boldsymbol{P}$ の基底 Σ に関する**成分**という．他の基底 Σ' に関する成分を $P'^a{}_{bc}$ とすれば，

$$P'^a{}_{bc} = A^a{}_i \overline{A}^j{}_b \overline{A}^k{}_c P^i{}_{jk}$$

が成り立ち，これを**混合テンソルの成分の変換法則**という．

同様にして **r 階反変 s 階共変のテンソル**が定義され，それを簡単に **(r, s) テンソル**ということもある．$(r, 0)$ テンソルすなわち r 階反変テンソル $\boldsymbol{H}$，$(0, s)$ テンソルすなわち s 階共変テンソル $\boldsymbol{T}$，(r, s) テンソル $\boldsymbol{P}$ の成分の変換法則はそれぞれ

$$(8)\quad \begin{aligned} H'^{a_1a_2\cdots a_r} &= A^{a_1}{}_{i_1}A^{a_2}{}_{i_2}\cdots A^{a_r}{}_{i_r}H^{i_1i_2\cdots i_r} \\ T'_{a_1a_2\cdots a_s} &= \overline{A}^{i_1}{}_{a_1}\overline{A}^{i_2}{}_{a_2}\cdots\overline{A}^{i_s}{}_{a_s}T_{i_1i_2\cdots i_s} \\ P'^{a_1\cdots a_r}{}_{b_1\cdots b_s} &= A^{a_1}{}_{i_1}A^{a_2}{}_{i_2}\cdots A^{a_r}{}_{i_r}\overline{A}^{j_1}{}_{b_1}\cdots\overline{A}^{j_s}{}_{b_s}P^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s} \end{aligned}$$

である．

以上では，反変ベクトルあるいは共変ベクトルの多線形関数としてテンソルを定義し，基底の変換のもとでその成分の変換法則を導いた．しかし，他書によっては基底（または座標系）に関する成分とその変換法則によってテンソルを定義しているものもある．これらの定義の関係については §4 で述べる．

問　　題

1. 例 1.1（154ページ）の基底の変換のもとで，Σ に関してそれぞれ次の成分をもつ2階のテンソルの Σ' に関する成分を求めよ．

(1) 共変テンソル　$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

(2) 反変テンソル　$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(3) 混合テンソル　$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

〔解　　答〕

1. 基底の変換の行列とその逆行列は

$$A = (A^a{}_i) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = (\overline{A}^i{}_a) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 16 & 7 & -10 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

である．ゆえに Σ' に関する成分は

(1) $(T'_{ab})={}^t(A^{-1})(T_{ij})A^{-1}$

$$=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}1 & 16 & 7\\ 2 & 7 & 4\\ 0 & -10 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & -4\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 16 & 7 & -10\\ 7 & 4 & -5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ -3 & 0 & 2\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

(2) $(H'^{ab})=A(H^{ij}){}^tA$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 2\\ -4 & 2 & -5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-33 & 24 & -30\\ 24 & 3 & 35\\ -30 & 35 & -18\end{pmatrix}$$

(3) $(P'^a{}_b)=A(P^i{}_j)A^{-1}$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ -5 & 3 & 1\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 16 & 7 & -10\\ 7 & 4 & -5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 3 & 1\\ 20 & 11 & -13\\ 9 & 11 & -4\end{pmatrix}$$

§3. テンソルの和，積

第1章 §3 で直交テンソルの和，スカラー倍，およびテンソル積を定義した．一般のテンソルの場合には，反変性と共変性があるので，その区別に注意を払えば，直交テンソルの場合と同様に取り扱える．

同じ反変性と共変性の階数をもつ2つのテンソル，たとえば，(1, 2) テンソル

$$\boldsymbol{S}=(S^i{}_{jk}),\qquad \boldsymbol{T}=(T^i{}_{jk})$$

について，対応する成分の和を成分とするテンソルを $\boldsymbol{S}$ と $\boldsymbol{T}$ との**和**といい，$\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T}$ で表す．すなわち

$$\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T}=(S^i{}_{jk}+T^i{}_{jk})$$

である．異なる性質，階数のテンソルについては普通は和を考えない．(r, s) テンソルの和は (r, s) テンソルである．

任意のテンソル，たとえば $\boldsymbol{T}=(T^i{}_{jk})$ について，

$$k\boldsymbol{T}=(kT^i{}_{jk})$$

で定義されるテンソルをテンソルの**スカラー倍**という．

さらに，2つのテンソル（反変性，共変性あるいは階数が異なってもよい）

$$\boldsymbol{S}=(S^i{}_j), \qquad \boldsymbol{T}=(T^i{}_{jk})$$

に対して，すべての成分の相互の積

$$(S^i{}_jT^k{}_{lm})$$

を成分にもつテンソルを $\boldsymbol{S}$ と $\boldsymbol{T}$ との**テンソル積**といい，記号

$$\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{T}=(S^i{}_jT^k{}_{lm})$$

で表す．$\boldsymbol{S}$ が (1, 1) テンソル，$\boldsymbol{T}$ が (1, 2) テンソルのとき，テンソル積 $\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{T}$ は (2, 3) テンソルであり，一般に (r, s) テンソルと (r', s') テンソルのテンソル積は $(r+r', s+s')$ テンソルである．

直交テンソルの積の場合と同様に2つの反変ベクトル $\boldsymbol{v}=(v^i)$ と $\boldsymbol{w}=(w^i)$ の順序を変えた2つのテンソル積は一般に同じではない．

$$\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}=(v^iw^j)=\begin{pmatrix} v^1w^1 & v^1w^2 & v^1w^3 \\ v^2w^1 & v^2w^2 & v^2w^3 \\ v^3w^1 & v^3w^2 & v^3w^3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{v}=(w^iv^j)={}^t(v^iw^j)$$

であって，$\boldsymbol{v}\,/\!/\,\boldsymbol{w}$ でない限り $\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}\neq\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{v}$ である．一般のテンソルについても同様に $\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{T}\neq\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{S}$ である．

基底 Σ の基本テンソル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ から作られる9個のベクトル積

$$\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j \qquad (i, j=1, 2, 3)$$

は2階の反変テンソルであり，Σ に関してそれを表す成分の行列は (i, j) 成分が1であり，その他の成分はすべて0である．たとえば

$$\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．第1章の直交テンソルについての定理 3.3 と同様に，9個の $\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$

は2階反変テンソルに対して基底をなしており，任意の2階反変テンソル $\boldsymbol{H}=(H^{ij})$ は $\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$ の1次結合

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} H^{11} & H^{12} & H^{13} \\ H^{21} & H^{22} & H^{23} \\ H^{31} & H^{32} & H^{33} \end{pmatrix}=H^{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$$

で表される．

双対基底 Σ^* の基本ベクトル $\boldsymbol{f}^1, \boldsymbol{f}^2, \boldsymbol{f}^3$ から作られる9個のベクトル積

$$\boldsymbol{f}^i\otimes\boldsymbol{f}^j \qquad (i, j=1, 2, 3)$$

は2階の共変テンソルである．それを表す成分の行列は (i, j) 成分が1であり，その他の成分はすべて0である．

それでは $\boldsymbol{f}^i\otimes\boldsymbol{f}^j$ は基底 Σ の基本ベクトルのテンソル積 $\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$ と同じではないかという疑問が生ずるであろう．これは，$\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$ と $\boldsymbol{f}^i\otimes\boldsymbol{f}^j$ は基底 Σ に関しては同じ形の行列で表されるが，次の節で詳しく述べるように，他の基底 Σ' に関してはそれとその双対基底 Σ'^* の基本ベクトルを用いて

$$\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j=A^a{}_iA^b{}_j\boldsymbol{e}'_a\otimes\boldsymbol{e}'_b$$
$$\boldsymbol{f}^i\otimes\boldsymbol{f}^j=\overline{A}^i{}_a\overline{A}^j{}_b\boldsymbol{f}'^a\otimes\boldsymbol{f}'^b$$

で表され，その成分はそれぞれ

$$(A^a{}_iA^b{}_j), \qquad (\overline{A}^i{}_a\overline{A}^j{}_b)$$

で与えられる反変テンソル，共変テンソルである．この表現で i と j はテンソル積 $\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$, $\boldsymbol{f}^i\otimes\boldsymbol{f}^j$ の番号を示し，a と b が基底 Σ' に関する成分の番号を表す指標である．

2階の共変テンソルに対しては，9個の $\boldsymbol{f}^i\otimes\boldsymbol{f}^j$ が基底を作っている．

さらに，反変基本ベクトルと共変基本ベクトルの積 $\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{f}^j$ $(i, j=1, 2, 3)$ は (1,1) テンソルであり，Σ に関しては $\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$, $\boldsymbol{f}^i\otimes\boldsymbol{f}^j$ と同じ形の行列で表されるが，基底 Σ' に関しては成分

$$(A^a{}_i\overline{A}^j{}_b)$$

をもっている．

2階の共変テンソル $\boldsymbol{S}=(S_{ij})$ と $\boldsymbol{T}=(T_{ij})$ は

$$S = S_{ij}\boldsymbol{f}^i \otimes \boldsymbol{f}^j, \qquad T = T_{ij}\boldsymbol{f}^i \otimes \boldsymbol{f}^j$$

であるから，その和は

$$S + T = (S_{ij} + T_{ij})\boldsymbol{f}^i \otimes \boldsymbol{f}^j$$

として計算することができる．反変テンソル，混合テンソルについても同様な計算法が適用できる．

基底 Σ の基本ベクトルの3階のテンソル積

$$\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k \qquad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

は全部で 27 個あり，3階の反変テンソルをそれらの1次結合

$$T = (T^{ijk}) = T^{ijk}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k$$

で表すことができる．

双対基底 Σ^* の基本ベクトルのテンソル積

$$\boldsymbol{f}^i \otimes \boldsymbol{f}^j \otimes \boldsymbol{f}^k \qquad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

も3階の共変テンソルに対して，同じ役割を果している．

$$T = (T_{ijk}) = T_{ijk}\boldsymbol{f}^i \otimes \boldsymbol{f}^j \otimes \boldsymbol{f}^k$$

また，たとえば

$$\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{f}^j \otimes \boldsymbol{f}^k \qquad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

は (1, 2) 混合テンソルに対する基底を作っている．

$$T = (T^i{}_{jk}) = T^i{}_{jk}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{f}^j \otimes \boldsymbol{f}^k$$

テンソルの対称性，交代性はともに反変または共変の指標について定義される．たとえば $T = (T_{ijk})$ について

$$T_{ijk} = T_{jik} \qquad \text{または} \qquad T_{ijk} = -T_{jik}$$

が成り立つとき，指標 i と j について**対称**または**交代**であるという．反変性または共変性の指標の区別をはっきりしておけば，第1章 §4 で述べた対称性，交代性についての性質はそのまま成り立つ．異なる性質の指標については一般には対称性，交代性は定義できない．

テンソルの対称性，交代性を，ある基底に関する成分について定義したが，

定理 3.1 テンソルの対称性，交代性は基底の変換に関して不変な性質である．

［証 明］ 2階の共変テンソル T について証明しよう．基底 $\Sigma\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ と $\Sigma'\{\boldsymbol{e}'_1,$

$e'_2,\ e'_3\}$ の変換を

$$e_i = A^a{}_i e'_a$$

とするとき，$\boldsymbol{T}$ の成分の変換法則は

$$T'_{ab} = \bar{A}^i{}_a \bar{A}^j{}_b T_{ij}$$

である．$T_{ij} = T_{ji}$ ならば

$$T'_{ab} = \bar{A}^i{}_a \bar{A}^j{}_b T_{ij} = \bar{A}^i{}_a \bar{A}^j{}_b T_{ji}$$

総和をとっている指標 i, j をそれぞれ j と i に書き替えれば

$$T'_{ab} = \bar{A}^j{}_a \bar{A}^i{}_b T_{ij} = \bar{A}^i{}_b \bar{A}^j{}_a T_{ij} = T'_{ba}$$

となる．交代の場合も同様に証明される． ◇

問　題

1. 3次元空間で3階の共変テンソル $\boldsymbol{T} = (T_{ijk})$ は 27 個の成分をもつ．次の性質をもつとき，独立な成分の個数はそれぞれ何個か．

（1） T_{ijk} が j, k について交代．

（2） T_{ijk} が j, k について対称．

（3） 式 $T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} = 0$ を満たすとき．

2. テンソル $\boldsymbol{T} = (T_{ijk})$ が i と j について対称，j と k について交代ならば，$\boldsymbol{T}$ は零テンソルであることを示せ．

3. テンソル $\boldsymbol{T} = (T_{ijk})$ が与えられたとき，$\boldsymbol{S} = (S_{ijk})$ が j と k について交代であって，次の関係式を満たすテンソル $\boldsymbol{S}$ を求めよ．

$$S_{ijk} - S_{jik} = T_{ijk}$$

[解　答]

1. （1） i の選び方は3通り，j, k の選び方は3個のものから2個取り出す組合せの総数 ${}_3C_2 = 3$ 通り であるから，計 $3 \times 3 = 9$ 個．

（2） j, k の選び方は3個のものから重複を許して2個取り出す組合せの総数 ${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$ 通り であるから，計 $3 \times 6 = 18$ 個．

これはまた次のように考えられる．成分の間に関係式

$$T_{ijk} - T_{ikj} = 0$$

があり，この方程式の個数は $3 \times 3 = 9$ であるから，独立な成分の個数は $27 - 9 = 18$ 個．

（3） 方程式の個数は i, j, k が重複を許して 1, 2, 3 から3個選ぶ組合せの数の ${}_3H_3 = {}_5C_3 = 10$ 通り あるから，独立な成分の個数は $27 - 10 = 17$ 個．

2.

$$\begin{aligned} T_{ijk} &= -T_{ikj} = -T_{kij} = T_{kji} = T_{jki} \\ &= -T_{jik} = -T_{ijk} \end{aligned}$$

$$\therefore\quad 2T_{ijk}=0,\qquad T_{ijk}=0$$

3.

$$S_{ijk}+S_{jki}=T_{ijk}$$
$$S_{kij}+S_{ijk}=T_{kij}$$
$$S_{jki}+S_{kij}=T_{jki}$$

第１式＋第２式－第３式を計算すれば

$$S_{ijk}=\frac{1}{2}(T_{ijk}+T_{kij}-T_{jki})$$

§4. 成分によるテンソルの構成

第１章 §6 で，直交基底に関して数個の成分で表される量が，直交変換のもとで一定の変換法則をもつならば，直交基底の取り方に無関係に，直交ベクトル，直交テンソルを定義できることを見た．

ここでも，同じ方法により，一般の基底 Σ, Σ' 等に関する成分から，基底に無関係に反変・共変・混合テンソルを構成できることを考えよう．

２つの基底 Σ と Σ' の基本ベクトルの変換式が

（１）　$e_i=A^a{}_i e'_a$　すなわち　$e'_a=\overline{A}^i{}_a e_i$

とする．基底 Σ, Σ' に関してそれぞれ３個の数の組 (v^i), (v'^a) が与えられ，基底の変換 (1) に対して，それらの間に

（２）　$$v'^a=A^a{}_i v^i$$

が成り立つとする．そのとき，基本ベクトルを用いて１次結合

（３）　$v^i e_i$　と　$v'^a e'_a$

を考えれば，変換式 (1), (2) により

$$v'^a e'_a=(A^a{}_i v^i)(\overline{A}^j{}_a e_j)=\delta_i{}^j v^i e_j$$
$$=v^i e_i$$

となり，(3) の２つの式は基底の取り方に無関係な量を表す．それを

$$v=v^i e_i=v'^a e'_a$$

とおき，反変ベクトルと定義する．

双対基底 Σ^*, Σ'^* の基本ベクトル f^i, f'^a の間の変換式は

$$f^i=\overline{A}^i{}_a f'^a,\qquad f'^a=A^a{}_i f^i$$

である．Σ, Σ' に関してそれぞれ３個の数の組 (α_i), (α'_a) が与えられ，それらの間に変換法則

$$\alpha'_a = \overline{A}^i{}_a \alpha_i, \qquad \alpha_i = A^a{}_i \alpha'_a$$

が成り立つとき，

$$\alpha_i \boldsymbol{f}^i = \alpha'_a \boldsymbol{f}'^a$$

が成り立つから，これを $\boldsymbol{\alpha}$ とおき，共変ベクトルと定義する．

次に，たとえば (1, 2) 混合テンソルの場合を考えよう．基底 Σ と Σ' に関してそれぞれの数の組 $(T^i{}_{jk})$, $(T'^a{}_{bc})$ で表され，それらの間に変換法則

$$T'^a{}_{bc} = A^a{}_i \overline{A}^j{}_b \overline{A}^k{}_c T^i{}_{jk}$$

が成り立っているものとする．そのとき，

$$T^i{}_{jk}\, \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{f}^j \otimes \boldsymbol{f}^k, \qquad T'^a{}_{bc}\, \boldsymbol{e}'_a \otimes \boldsymbol{f}'^b \otimes \boldsymbol{f}'^c$$

とおけば，これらは互いに等しく，したがって基底の取り方に無関係な量を表す．これを (1, 2) 混合テンソルと定義することができる．

定理 4.1　それぞれの基底 Σ, Σ' に関して実数の組 (v^i) と (v'^a), (α_i) と (α'_a), あるいは $(T^i{}_{jk})$ と $(T'^a{}_{bc})$ で表され，基底変換 (1) のもとでそれぞれ変換法則

$$v'^a = A^a{}_i v^i$$

$$\alpha'_a = \overline{A}^i{}_a \alpha_i$$

$$T'^a{}_{bc} = A^a{}_i \overline{A}^j{}_b \overline{A}^k{}_c T^i{}_{jk}$$

に従うとき，各基底に関してそれらを成分にもつような反変ベクトル $\boldsymbol{v}$, 共変ベクトル $\boldsymbol{\alpha}$, あるいは (1, 2) テンソル $\boldsymbol{T}$ が構成される．同様な方法で高階の反変テンソル，共変テンソルあるいは混合テンソルを構成することができる．

第1章 §6 で直交テンソルの場合にも述べたように，テンソルを成分から出発して定義する方法では，この定理の性質，すなわち一定の変換法則に従う数の組によって，テンソルを定義している．

例 4.1　各基底において $\boldsymbol{I} = (\delta_j{}^i)$ で表される $\boldsymbol{I}$ は (1, 1) テンソルであり，**単位テンソル**といわれる．テンソル $\boldsymbol{I}$ は，任意の反変ベクトル $\boldsymbol{v}$ また共変ベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ に対して恒等変換

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{I}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}$$

を与える．

［証 明］ 基底の変換 (1) のとき，$A^a{}_i\overline{A}^j{}_b\delta_j{}^i$ を考えれば

$$A^a{}_i\overline{A}^j{}_b\delta_j{}^i = A^a{}_i\overline{A}^i{}_b = \delta_b{}^a$$

であるから，Σ と Σ' に関してそれぞれ成分 $(\delta_j{}^i)$, $(\delta_b{}^a)$ で表される量は (1, 1) テンソルの変換法則に従っており，定理 4.1 により (1, 1) テンソルを構成する.

また反変ベクトル $\boldsymbol{v}=(v^i)$，また共変ベクトル $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_i)$ に対して

$$I(\boldsymbol{v})=(\delta_j{}^i v^j)=(v^i)=\boldsymbol{v}$$

$$I(\boldsymbol{\alpha})=(\delta_j{}^i \alpha_i)=(\alpha_j)=\boldsymbol{\alpha}$$

であり，恒等変換を与える. ◇

前節で，(1, 2) テンソル $\boldsymbol{S}$ と $\boldsymbol{T}$ の和を成分の和

$$\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T}=(S^i{}_{jk}+T^i{}_{jk})$$

で定義したが，他の基底 Σ' に関する成分がそれぞれ $(S'^a{}_{bc})$, $(T'^a{}_{bc})$ であって，それらが (1, 2) テンソルの成分の変換法則

$$S'^a{}_{bc}=A^a{}_i\overline{A}^j{}_b\overline{A}^k{}_cS^i{}_{jk}, \qquad T'^a{}_{bc}=A^a{}_i\overline{A}^j{}_b\overline{A}^k{}_cT^i{}_{jk}$$

に従うとき，その成分の和も変換法則

$$S'^a{}_{bc}+T'^a{}_{bc}=A^a{}_i\overline{A}^j{}_b\overline{A}^k{}_c(S^i{}_{jk}+T^i{}_{jk})$$

に従う．したがって，テンソルの和の定義が基底の取り方に無関係な本質的意味をもっている.

テンソル積についても，$\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{T}$ が 2 つの基底 Σ と Σ' に関してそれぞれ成分 $(S^i{}_j)$, $(S'^a{}_b)$ および $(T^i{}_{jk})$, $(T'^a{}_{bc})$ をもち，成分の変換法則

$$S'^a{}_b=A^a{}_i\overline{A}^j{}_bS^i{}_j, \qquad T'^a{}_{bc}=A^a{}_i\overline{A}^j{}_b\overline{A}^k{}_cT^i{}_{jk}$$

に従うとき，成分の積は変換法則

$$S'^a{}_bT'^c{}_{de}=A^a{}_i\overline{A}^j{}_bA^c{}_k\overline{A}^l{}_d\overline{A}^m{}_eS^i{}_jT^k{}_{lm}$$

に従い，これは (2, 3) 混合テンソルの成分の変換法則であって，テンソル積が基底の取り方に無関係な意味をもっていることがわかる.

いま，(1, 2) 混合テンソル $\boldsymbol{T}$ の 2 つの基底に関する成分を $(T^i{}_{jk})$, $(T'^a{}_{bc})$ とする．それぞれについて

$$T^i{}_{ji}=T^1{}_{j1}+T^2{}_{j2}+T^3{}_{j3} \qquad (j=1,\ 2,\ 3)$$

$$T'^a{}_{ba}=T'^1{}_{b1}+T'^2{}_{b2}+T'^3{}_{b3} \qquad (b=1,\ 2,\ 3)$$

のような和を考える．そのとき成分の変換法則から,

$$T'^{a}{}_{ba} = A^{a}{}_{i}\overline{A}^{j}{}_{b}\overline{A}^{k}{}_{a}T^{i}{}_{jk} = \delta_{i}{}^{k}\overline{A}^{j}{}_{b}T^{i}{}_{jk}$$
$$= \overline{A}^{j}{}_{b}T^{i}{}_{ji}$$

であり，これは共変ベクトルの成分の変換法則である．ゆえにそれぞれの基底に関して

$$(T^{i}{}_{ji}),\qquad (T'^{a}{}_{ba})$$

で表される量は1つの共変ベクトルを構成する．

たとえば (2, 3) テンソル $\boldsymbol{T}=(T^{ij}{}_{klm})$ に対して，その1つの反変性の指標 i と1つの共変性の指標 k を等しい番号 1, 2, 3 としてその総和を作れば，

$$(T^{ij}{}_{ilm})$$

は反変性と共変性が1つずつ少ない (1, 2) テンソルを定義する．このようにして，一般に (r, s) テンソルから $(r-1, s-1)$ テンソルを作る方法を**縮約**または**縮合**という．直交テンソルでは反変性と共変性の区別がなく，2つの指標について縮約できるが，一般のテンソルでは，反変性同士，共変性同士の指標については縮約はできない．

(1, 1) テンソル $\boldsymbol{T}=(T^{i}{}_{j})$ の縮約はスカラーであり，$\boldsymbol{T}$ を行列 $(T^{i}{}_{j})$ で表した場合のトレースであり，しばしば $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T}$ で表される．

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T} = T^{i}{}_{i} = T^{1}{}_{1} + T^{2}{}_{2} + T^{3}{}_{3}$$

縮約されたテンソル $(T^{ij}{}_{ilm})$ と $(T^{ij}{}_{kim})$ とは一般には同じでない．また，縮約は続けて行うことができる．$(T^{ij}{}_{ijm})$ は (0, 1) テンソルすなわち共変ベクトルである．しかし，$(T^{ij}{}_{ijm})$ と $(T^{ij}{}_{jim})$ とは一般には同じベクトルではない．したがって縮約する指標を明示しなければならない．

テンソル積と縮約とを続けて行うこともできる．(1, 1) テンソル $\boldsymbol{S}=(S^{i}{}_{j})$ と (1, 2) テンソル $\boldsymbol{T}=(T^{i}{}_{jk})$ のテンソル積

$$\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{T} = (S^{i}{}_{j}T^{k}{}_{lm})$$

は (2, 3) テンソルであるが，指標 j と k について縮約すれば

$$(S^{i}{}_{j}T^{j}{}_{lm})$$

は i, l, m が生きた指標である (1, 2) テンソルを構成する．さらに i と l について縮約すれば

$$(S^{i}{}_{j}T^{j}{}_{im})$$

は共変ベクトルである．

とくに，テンソル $\boldsymbol{T}=(T^i{}_{jm})$ と反変ベクトル $\boldsymbol{v}=(v^i)$ または共変ベクトル $\boldsymbol{a}=(\alpha_i)$ とについて，

$$(T^i{}_{jm}v^j) \qquad や \qquad (T^i{}_{jm}\alpha_i)$$

はそれぞれ (1, 1) テンソルまたは (0, 2) テンソルである．この場合，$\boldsymbol{T}$ に $\boldsymbol{v}$ または $\boldsymbol{a}$ を**縮約する**または**縮合する**という．人によっては，1つのテンソルの2つの指標について和をとることを縮約といい，ベクトルを掛けて縮約することを縮合というように区別している場合もある．

2階の共変テンソル $\boldsymbol{T}=(T_{ij})$ は，2個の反変ベクトルを変数とする双線形関数であった．任意の反変ベクトル $\boldsymbol{v}=(v^i)$, $\boldsymbol{w}=(w^i)$ に対して

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w})=T_{ij}v^iw^j$$

であり，これは $\boldsymbol{T}$ に $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ を続けて縮約して得られるスカラーと考えることができる．これは高階の反変・共変あるいは混合テンソルについても適用することができる．

いま，基底 Σ, Σ' に関してそれぞれ (T_{ij}), (T'_{ab}) で表される量があり，任意の反変ベクトル $\boldsymbol{v}=(v^i)=(v'^a)$ に対して，

(4)　　$(T_{ij}v^i) \qquad と \qquad (T'_{ab}v'^a)$

が共変ベクトルを構成するものとする．そのとき，さらに任意の反変ベクトル $\boldsymbol{w}=(w^i)=(w'^a)$ を縮約すればその結果はスカラーであり，基底に無関係に等しい，すなわち

$$T_{ij}v^iw^j=T'_{ab}v'^aw'^b$$

である．これは $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ についての双線形関数であるから，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w})$ と書くことにすれば，(T_{ij}), (T'_{ab}) は1つのテンソル $\boldsymbol{T}$ の Σ あるいは Σ' に関する成分と考えることができる．これを定理として述べれば，

定理 4.2　それぞれの基底に関して 3^2 個の数の組 (T_{ij}) で表される量があり，任意の反変ベクトル $\boldsymbol{v}=(v^i)$ を縮約した $(T_{ij}v^i)$ が共変ベクトルを作るならば，(T_{ij}) は1つの共変テンソルである．

この定理は，一般に $(T^i{}_{jk})$ などで表される量にも適用され，テンソルの**商法則**といわれている．テンソルを成分とその変換法則によって定義する方

法では，この定理は次のようにして証明される.

(4) の2組の数が同じ共変ベクトルの成分であるから，変換法則

$$T'_{ab}v'^a=\overline{A}^j{}_b T_{ij}v^i \tag{5}$$

に従う．一方，$\boldsymbol{v}$ の成分の変換法則は

$$v'^a=A^a{}_iv^i \qquad \text{すなわち} \qquad v^i=\overline{A}^i{}_av'^a$$

である．これを (5) に代入すれば

$$T'_{ab}v'^a=\overline{A}^j{}_bT_{ij}\overline{A}^i{}_av'^a$$

であり，この式が任意の v'^a に対して成り立つから，

$$T'_{ab}=\overline{A}^i{}_a\overline{A}^j{}_bT_{ij}$$

を得る．これは (T_{ij}), (T'_{ab}) が1つの共変テンソルの成分であることを示している.

問　題

1. テンソル (S_{ij}) が対称，(T^{ij}) が交代であるとき，

$$S_{ij}T^{ij}=0$$

であることを証明せよ.

2. クロネッカーのデルタ $\delta_j{}^i$ について次の式を簡単にせよ.

(1) $\delta_i{}^i$

(2) テンソル $(T^i{}_{jk})$ に対して　$\delta_l{}^iT^l{}_{jk}$,　$\delta_j{}^lT^i{}_{lk}$

(3) $\delta_j{}^i\delta_i{}^j$

[解　答]

1. $T^{ij}+T^{ji}=0$ に S_{ij} を縮約すれば，$\boldsymbol{S}$ の対称性により

$$S_{ij}T^{ij}+S_{ij}T^{ji}=S_{ij}T^{ij}+S_{ji}T^{ji}=2S_{ij}T^{ij}=0$$

2. (1) $\delta_i{}^i=\delta_1{}^1+\delta_2{}^2+\delta_3{}^3=3$

(2) $\delta_l{}^iT^l{}_{jk}=\delta_1{}^iT^1{}_{jk}+\delta_2{}^iT^2{}_{jk}+\delta_3{}^iT^3{}_{jk}=T^i{}_{jk}$，同様に $\delta_j{}^lT^i{}_{lk}=T^i{}_{jk}$

(3) $\delta_j{}^i\delta_i{}^j=\delta_i{}^i=3$

§5. 基本計量テンソル

内積 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ は任意のベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ に対して実数値を対応させる双線形関数と考えることができた．いま，$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ を反変ベクトルと考えて，内積を

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$$

と表せば，$\boldsymbol{g}$ は2階の共変テンソルと考えることができる．

基底 $\Sigma\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ に関する $\boldsymbol{g}$ の成分は

$$g_{ij} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j$$

で与えられる．もし，Σ が直交基底ならば，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ はそれぞれ単位ベクトルであり，かつ互いに直交しているから，成分 g_{ij} は

$$g_{ij} = \delta_{ij}$$

となる．しかし，Σ が一般の基底であれば，g_{11}, g_{22}, g_{33} はそれぞれ $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ の長さの平方

$$g_{11} = |\boldsymbol{e}_1|^2, \qquad g_{22} = |\boldsymbol{e}_2|^2, \qquad g_{33} = |\boldsymbol{e}_3|^2$$

であり，$i \neq j$ に対しては θ_{ij} を $\boldsymbol{e}_i$ と $\boldsymbol{e}_j$ のなす角として

$$g_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = |\boldsymbol{e}_i||\boldsymbol{e}_j| \cos \theta_{ij}$$

である．

一般に

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i)$$

すなわち

$$g_{ij} = g_{ji}$$

であり，$\boldsymbol{g} = (g_{ij})$ は対称テンソルである．

2つの反変ベクトル $\boldsymbol{u} = (u^i)$, $\boldsymbol{v} = (v^i)$ に対して

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = g_{ij} u^i v^j$$

であり，とくに $\boldsymbol{v}$ 自身の内積はその長さ $|\boldsymbol{v}|$ の平方

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = g_{ij} v^i v^j = |\boldsymbol{v}|^2$$

であるから，任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = g_{ij} v^i v^j \geqq 0$$

である．ここで等号が成り立つのは $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ のときに限る．この性質をテンソル $\boldsymbol{g}$ の**正定値性**という．以上をまとめれば

定理 5.1 ユークリッド空間の内積には，次の性質をもつ2階の共変テンソル $\boldsymbol{g} = (g_{ij})$ が対応する．

（i） $\boldsymbol{g}$ は対称である．　$g_{ij} = g_{ji}$

（ii） $\boldsymbol{g}$ は正定値である．

この共変テンソルをユークリッド空間の**基本計量テンソル**あるいは単に**基本テンソル**という.

逆に，上の定理の性質をもつ2階の共変テンソル $\boldsymbol{g}$ が与えられたとき，その成分が

$$g'_{ab}=\delta_{ab}$$

であるような基底 Σ' が存在することを証明しよう．この基底に関して任意の反変ベクトル $\boldsymbol{v}=(v'^a)$ の長さは

$$|\boldsymbol{v}|^2=g'_{ab}v'^a v'^b=\delta_{ab}v'^a v'^b$$
$$=(v'^1)^2+(v'^2)^2+(v'^3)^2$$

で与えられる.

いま，$\Sigma''\{\boldsymbol{e}''_1,\ \boldsymbol{e}''_2,\ \boldsymbol{e}''_3\}$ を1つの基底とし，Σ からの変換式を

$$\boldsymbol{e}_i=B^p{}_i\,\boldsymbol{e}''_p \qquad (p=1,\ 2,\ 3)$$

とすれば，Σ'' に関する $\boldsymbol{g}$ の成分は

$$(1) \qquad g''_{pq}=\overline{B}^i{}_p\overline{B}^j{}_q g_{ij}$$

で与えられる.

$$B=(B^p{}_i), \qquad B^{-1}=(\overline{B}^i{}_p)$$

とおいて，成分の変換法則 (1) を行列で表せば

$$(g''_{pq})={}^tB^{-1}(g_{ij})B^{-1}$$

と書くことができる．行列の理論により，適当な直交行列 B を用いて行列 (g''_{pq}) を対角行列

$$(g''_{pq})=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$$

にすることができる.

Σ'' に関する反変ベクトル $\boldsymbol{v}$ の成分を (v''^p) とすれば，

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v})=\lambda_1(v''^1)^2+\lambda_2(v''^2)^2+\lambda_3(v''^3)^2$$

であり，これが任意のベクトル $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ に対して正であるためには

$$\lambda_1>0, \quad \lambda_2>0, \quad \lambda_3>0$$

でなければならない．行列 $C=(C^a{}_p)$ を

$$C=(C^a{}_p)=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3}\end{pmatrix},\quad C^{-1}=(\overline{C}^p{}_a)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{\lambda_1} & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{\lambda_2} & 0\\ 0 & 0 & 1/\sqrt{\lambda_3}\end{pmatrix}$$

とすれば，

$$\boldsymbol{e}''_p=C^a{}_p\boldsymbol{e}'_a,\qquad \boldsymbol{e}_i=B^p{}_iC^a{}_p\boldsymbol{e}'_a$$

で与えられる基底 $\Sigma'\{\boldsymbol{e}'_1,\ \boldsymbol{e}'_2,\ \boldsymbol{e}'_3\}$ に関して

$$(g'_{ab})={}^tC^{-1}(g''_{pq})C^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

となる．

定理 5.2 基本テンソル $\boldsymbol{g}$ の成分の行列 (g_{ij}) は正則である．その逆行列を

$$(g^{ij})=(g_{ij})^{-1}$$

とおくとき，(g^{ij}) は対称な 2 階反変テンソルを構成する．これを**基本テンソルの反変成分**という．

[**証明**] 上記の説明中，(g'_{ab}) あるいは (g''_{pq}) は正の固有値をもつから正則であり，したがって行列 (g_{ij}) も正則である．

基底の変換 $\boldsymbol{e}_i=A^a{}_i\boldsymbol{e}'_a$ に従う 2 つの基底 $\Sigma\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ と $\Sigma'\{\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}'_3\}$ に関する $\boldsymbol{g}$ の成分の行列 (g_{ij}), (g'_{ab}) の逆行列をそれぞれ

$$(g^{ij})=(g_{ij})^{-1},\qquad (g'^{ab})=(g'_{ab})^{-1}$$

とおき，これらの成分の関係を求めよう．行列 (g^{ij}), (g'^{ab}) も対称であり，

(2) $$g^{ij}g_{jk}=\delta_k{}^i,\qquad g'^{ab}g'_{bc}=\delta_c{}^a$$

が成り立つ．

例 4.1 によりクロネッカーのデルタ $(\delta_j{}^i)$, $(\delta_b{}^a)$ は $(1,1)$ テンソルであるから，関係式

$$g'^{ab}g'_{bc}=A^a{}_i\overline{A}^k{}_c\delta_k{}^i=A^a{}_i\overline{A}^k{}_cg^{ij}g_{jk}$$

が成り立つ．これに共変テンソルとしての基本テンソル $\boldsymbol{g}$ の成分の変換法則

$$g'_{bc}=\overline{A}^j{}_b\overline{A}^k{}_cg_{jk}$$

を代入すれば，

$$\overline{A}^j{}_b\overline{A}^k{}_c g'^{ab} g_{jk} = A^a{}_i\overline{A}^k{}_c g^{ij} g_{jk}$$

$A=(A^a{}_i)$，$g=(g_{jk})$ が正則であるから

$$\overline{A}^j{}_b g'^{ab} g_{jk} = A^a{}_i g^{ij} g_{jk}$$

$$\therefore\quad \overline{A}^j{}_b g'^{ab} = A^a{}_i g^{ij}$$

$$\therefore\quad g'^{ab} = A^a{}_i A^b{}_j g^{ij}$$

が成り立つ．これは２階の反変テンソルの成分の変換法則であり，逆行列 (g^{ij}) は２階の反変テンソルを定義する． ◇

基本テンソルはユークリッド空間のベクトルの長さを与えるものであるから，重要な役目をする．いま，反変ベクトル $\boldsymbol{v}=(v^i)$ に対して，それと基本テンソルとの縮約

$$g_{ij}v^i$$

を考えれば，これは共変ベクトルの成分である．これを同じ文字 $\boldsymbol{v}$ を用いて

$$v_j = g_{ij}v^i \tag{3}$$

で表す．

一方，共変ベクトル $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_j)$ に対して

$$g^{ij}\alpha_j$$

を考えれば，これは反変ベクトルである．これを

$$\alpha^i = g^{ij}\alpha_j \tag{4}$$

と書くことにする．

反変ベクトル $\boldsymbol{v}=(v^i)$ に対して式 (3) で得られる共変ベクトル (v_j) に，さらに式 (4) による反変ベクトルを作れば，(2) の関係により

$$g^{ij}v_j = g^{ij}g_{jk}v^k = \delta_k{}^i v^k = v^i$$

となり，もとの反変ベクトル $\boldsymbol{v}$ の成分になる．同様に，共変ベクトル $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_j)$ から得られる反変ベクトル (α^i) に，(3) の方法によって共変ベクトルを作れば，もとの共変ベクトルの成分になる．このように，基本テンソルを媒介にして，１つのベクトルを反変ベクトルとしても共変ベクトルとしても表すことができる．そのとき，v^i をベクトル $\boldsymbol{v}$ の**反変成分**，v_j を**共変成分**という．また，反変成分を表す上付きの指標を共変性を表す下付きの指標に変

えたり，あるいはその逆を行うので，これを**指標の上げ下げ**という．

指標の上げ下げは，テンソルの成分についても行うことができる．たとえば (1, 2) テンソル $(T^i{}_{jk})$ に対して，基本テンソルを縮約した $g^{hj}T^i{}_{jk}$ を

$$T^{ih}{}_k = g^{hj}T^i{}_{jk}$$

とおけば，$(T^{ih}{}_k)$ は (2, 1) テンソルである．2個以上の指標をもつテンソルの場合，どの指標を上げ下げしたかを明らかにしておく必要がある．たとえば

$$T^{i\cdot h}_{\cdot j} = g^{hk}T^i{}_{jk}$$

などのように，指標の空白場所に・を入れて書くことがある．

$$T^{ij}_{\cdot\cdot k} \quad と \quad T^{i\cdot k}_{\cdot j}$$

とは同じではない．本書では・を用いないで，空白のままにしておく．

指標の上げ下げは，いくつもの指標について行うこともできる．

$$T^{ijk} = g^{jh}g^{kl}T^i{}_{hl}, \qquad T_{ijk} = g_{ih}T^h{}_{jk}$$

などと書くことができる．

ベクトル $\boldsymbol{u} = (u^i)$ と $\boldsymbol{v} = (v^i)$ の内積は，この指標の上げ下げによって

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = g_{ij}u^iv^j = u_jv^j = u^iv_i$$

と表すことができる．これは，その2つのベクトルの共変成分と反変成分とを縮約した形になっている．

問　題

1. $\Sigma\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ が直交基底であるとき，ベクトル

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}'_1 &= 2\boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}'_2 &= -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}'_3 &= \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

で作られる基底を $\Sigma'\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$ とする．

(1) Σ' に関する基本テンソルの共変成分 (g'_{ab}) および反変成分 (g'^{ab}) を求めよ．

(2) Σ に関して成分が $\boldsymbol{v} = (1, 4, 3)$ のベクトルの Σ' に関する反変成分 (v'^a)，共変成分 (v'_b) を求めよ．

(3) (2) で得られた反変成分 (v'^a) の指標を基本テンソル (g'_{ab}) によって下げよ．

2. 基底 $\Sigma\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ に関して基本テンソル $\boldsymbol{g} = (g_{ij})$ が

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&5&1\\1&1&3\end{pmatrix}$$

であるとき，直交基底 $\Sigma'\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ を求めよ．

3. 2階のテンソル $\boldsymbol{T}=(T_{ij})$ に対して

$$|\boldsymbol{T}|^2=g^{ik}g^{jl}T_{ij}T_{kl}=T_{ij}T^{ij}$$

で与えられるスカラー $|\boldsymbol{T}|$ をテンソル $\boldsymbol{T}$ の**大きさ**という．任意のテンソルに対して

$$|\boldsymbol{T}|^2\geqq 0$$

であり，等号が成り立つのは $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{O}$ であるときに限ることを証明せよ．

［解　　答］

1. (1)　$g'_{ab}=\boldsymbol{g}(e'_a, e'_b)=e'_a\cdot e'_b$

であるから，直交基底 Σ においてこの内積を計算すればよい．

$$(g'_{ab})=\begin{pmatrix}4&-2&2\\-2&2&-3\\2&-3&14\end{pmatrix},\qquad (g'^{ab})=(g'_{ab})^{-1}=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}19&22&2\\22&52&8\\2&8&4\end{pmatrix}$$

あるいは基底変換の行列は

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&1&-2\\0&0&3\end{pmatrix}\qquad\therefore\quad A=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&3&1\\0&6&4\\0&0&2\end{pmatrix}$$

であり，基本テンソル $\boldsymbol{g}$ の直交基底 Σ に関する共変成分も反変成分もそれぞれ (δ_{ij}), (δ^{ij}) であるから，

$$(g'_{ab})=(\overline{A}^i{}_a\overline{A}^j{}_b\delta_{ij})=(\sum_{i=1}^{3}\overline{A}^i{}_a\overline{A}^i{}_b)={}^tA^{-1}A^{-1}$$

$$(g'^{ab})=(A^a{}_iA^b{}_j\delta^{ij})=(\sum_{i=1}^{3}A^a{}_iA^b{}_i)=A{}^tA$$

を計算しても求めることができる．

(2)

$$\begin{pmatrix}v'^1\\v'^2\\v'^3\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}v^1\\v^2\\v^3\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&3&1\\0&6&4\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\1\end{pmatrix}$$

$$(v'_1, v'_2, v'_3)=(v_1, v_2, v_3)A^{-1}=(1, 4, 3)\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&1&-2\\0&0&3\end{pmatrix}=(2, 3, 2)$$

(3)

$$(v'_b)=(g'_{ba}v'^a)=\begin{pmatrix}4&-2&2\\-2&2&-3\\2&-3&14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\6\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$$

2. (g_{ij}) を標準形に直すためその固有値を求める．

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-6)=0$$

$\lambda=2$ に対する固有ベクトルは

$$\begin{cases} x+\ \ y+z=0 \\ x+3y+z=0 \end{cases} \quad \text{を解いて} \quad x:y:z=1:0:-1$$

$\lambda=3$ に対する固有ベクトルは

$$\begin{cases} \qquad y+z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases} \quad \text{を解いて} \quad x:y:z=-1:1:-1$$

$\lambda=6$ に対する固有ベクトルは

$$\begin{cases} -3x+y+z=0 \\ \quad x-y+z=0 \end{cases} \quad \text{を解いて} \quad x:y:z=1:2:1$$

したがって，基底 $\Sigma''\{e''_1,\ e''_2,\ e''_3\}$ として

$$\begin{aligned} e''_1 &= \quad e_1 \qquad\quad -e_3 \\ e''_2 &= -e_1+\ \ e_2-e_3 \\ e''_3 &= \quad e_1+2e_2+e_3 \end{aligned} \qquad B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

をとれば，

$$(g''_{pq})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}$$

となる．ゆえに，さらに基底 $\Sigma'\{e'_1,\ e'_2,\ e'_3\}$ として

$$e'_1=\frac{1}{2}e''_1=\frac{1}{2}(e_1-e_3)$$

$$e'_2=\frac{1}{3}e''_2=\frac{1}{3}(-e_1+e_2-e_3)$$

$$e'_3=\frac{1}{6}e''_3=\frac{1}{6}(e_1+2e_2+e_3)$$

をとれば，Σ' に関する基本テンソルの成分は (δ_{ab}) となり，Σ' は直交基底である．

3. 1つの直交基底 Σ に関して基本テンソルの成分は $(g_{ij})=(g^{ij})=(\delta_{ij})$ であるから，

$$|\boldsymbol{T}|^2=\delta^{ik}\delta^{jl}T_{ij}T_{kl}=\sum_{i,j=1}^{3}T_{ij}T_{ij}=\sum_{i,j=1}^{3}T_{ij}{}^2$$

である．$|\boldsymbol{T}|$ はスカラーであり，スカラーは，どのような基底に関しても不変であるから，

$$|\boldsymbol{T}|^2\geqq 0$$

である．

等号が成立すれば，直交基底に関する成分 T_{ij} はすべて 0 でなければならない．そのとき任意の基底に関してもすべての成分が 0 になるから，$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{O}$ である．

§6. テンソル密度

基底 Σ から Σ' への変換の係数行列 $A=(A^a{}_i)$ の行列式を

$$|A|=\det(A^a{}_i)$$

で表そう．そのとき

$$|A^{-1}|=\det(\bar{A}^i{}_a)=|A|^{-1}$$

である．また基本テンソル $\boldsymbol{g}=(g_{ij})=(g'_{ab})$ のそれぞれの基底に関する成分の行列式を

$$\mathfrak{g}=\det(g_{ij}), \qquad \mathfrak{g}'=\det(g'_{ab})$$

で表す．基本テンソルの成分の変換法則は

$$g'_{ab}=\bar{A}^i{}_a\bar{A}^j{}_b g_{ij}$$

であるから，その行列式の間には

$$\mathfrak{g}'=|A|^{-2}\mathfrak{g}$$

という関係が成り立つ．

直交基底において考えたエディントンの ε を，一般の基底に関しても考えよう．すなわち各基底において (ε_{ijk}) は

$$\text{(1)}\quad \begin{aligned}\varepsilon_{123}&=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1\\ \varepsilon_{132}&=\varepsilon_{213}=\varepsilon_{321}=-1\end{aligned}$$

であり，その他の成分はすべて0であるとする．他の基底 Σ' において，同じ成分をもつ量を (ε'_{abc}) で書くことにする．3個の反変ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ に対して

$$\varepsilon_{ijk}u^i v^j w^k=\begin{vmatrix}u^1 & v^1 & w^1\\ u^2 & v^2 & w^2\\ u^3 & v^3 & w^3\end{vmatrix}$$

であり，行列式はその各列について多線形性をもつから，(ε_{ijk}) は3階の共変テンソルを定義するものと考えられる．しかし，Σ から Σ' への基底の変換の際，$\bar{A}^i{}_a\bar{A}^j{}_b\bar{A}^k{}_c\varepsilon_{ijk}$ の1つの成分を計算すれば

$$\bar{A}^i{}_1\bar{A}^j{}_2\bar{A}^k{}_3\varepsilon_{ijk}=\begin{vmatrix}\bar{A}^1{}_1 & \bar{A}^1{}_2 & \bar{A}^1{}_3\\ \bar{A}^2{}_1 & \bar{A}^2{}_2 & \bar{A}^2{}_3\\ \bar{A}^3{}_1 & \bar{A}^3{}_2 & \bar{A}^3{}_3\end{vmatrix}=|A|^{-1}$$

であり，下付きの指標 1, 2, 3 を順に入れ換えれば，a, b, c が 1, 2, 3 の偶置換であるか奇置換であるかによって上の成分は $|A|^{-1}$ または $-|A|^{-1}$ に等しくなる．ゆえに

$$\bar{A}^i{}_a\bar{A}^j{}_b\bar{A}^k{}_c\varepsilon_{ijk}=|A|^{-1}\varepsilon'_{abc}$$

すなわち

$$\varepsilon'_{abc}=|A|\bar{A}^i{}_a\bar{A}^j{}_b\bar{A}^k{}_c\varepsilon_{ijk}$$

が成り立つ．

一方，エディントンの ε が反変性をもつものとして，その成分を (ε^{ijk}) および (ε'^{abc}) で表すことにする．その成分の値は (1) で指標 1, 2, 3 を上に上げた式で与えられる．そのとき，共変性をもつ場合と類似な考察により

$$A^1{}_iA^2{}_jA^3{}_k\varepsilon^{ijk}=\det(A^a{}_i)=|A|$$

であり，(ε^{ijk}) と (ε'^{abc}) との関係は

$$\varepsilon'^{abc}=|A|^{-1}A^a{}_iA^b{}_jA^c{}_k\varepsilon^{ijk}$$

で表される．

一般に，基底の変換のもとでの成分の変換法則が，テンソルの成分の普通の変換法則の他に変換の行列 A の行列式 $|A|$ の累乗が因数に入ってくる量，たとえば $(P^i{}_{jk})$ と $(P'^a{}_{bc})$ について変換法則が

$$P'^a{}_{bc}=|A|^{-w}A^a{}_i\bar{A}^j{}_b\bar{A}^k{}_cP^i{}_{jk}$$

であるとき，それを**重さ w の相対テンソル**または**テンソル密度**という．相対テンソルに対して，普通のテンソルを**絶対テンソル**ということがある．

基本テンソルの行列式 $\mathfrak{g}=\det(g_{ij})$ は重さ 2 の 0 階のテンソル密度すなわちスカラー密度である．エディントンの ε は重さ -1 の 3 階の共変テンソル密度 (ε_{ijk}) を定義するものと考えることができるし，重さ 1 の 3 階反変テンソル密度 (ε^{ijk}) を定義するものと見なすこともできる．

$$\varepsilon^{ijk}g_{i1}g_{j2}g_{k3}=\begin{vmatrix}g_{11}&g_{12}&g_{13}\\g_{21}&g_{22}&g_{23}\\g_{31}&g_{32}&g_{33}\end{vmatrix}=\mathfrak{g}$$

であり，1, 2, 3 の置換を行えば

(2) $$\varepsilon^{ijk} g_{il} g_{jm} g_{kn} = \mathfrak{g} \varepsilon_{lmn}$$

であるから，(ε^{ijk}) と (ε_{ijk}) とは指標の上げ下げによって得られる関係にないことを注意しておこう.

基底を直交基底のみに限り，したがって行列 $A=(A^i{}_a)$ を直交行列に限って考えれば，$|A|=\pm 1$ であるから，重さが奇数であるテンソル密度は軸性テンソルになる.

反変ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ に対して

$$\varepsilon_{ijk} v^j w^k$$

は重さ -1 の共変ベクトル密度であり，共変ベクトル $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_i)$, $\boldsymbol{\beta}=(\beta_i)$ に対して

$$\varepsilon^{ijk} \alpha_j \beta_k$$

は重さ 1 の反変ベクトル密度である.

直交基底に関する場合と同様に，次の公式が成り立つ.

$$\varepsilon^{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_l{}^j \delta_m{}^k - \delta_m{}^j \delta_l{}^k$$

$$\varepsilon^{ijk} \varepsilon_{ijm} = 2\delta_m{}^k$$

$$\varepsilon^{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6$$

$\mathfrak{g}$ が重さ 2 のスカラー密度であるから，

$$E_{ijk} = \sqrt{\mathfrak{g}}\, \varepsilon_{ijk}, \qquad E^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{g}}} \varepsilon^{ijk}$$

とおけば，それぞれ 3 階の共変テンソル，反変テンソルである. ただし，基底の変換によって，その行列式 $|A|$ の符号だけ異なり，このようなテンソルを**有向テンソル**という. 関係式 (2) により

(3) $$E_{ijk} = g_{il} g_{jm} g_{kn} E^{lmn}, \qquad E^{ijk} = g^{il} g^{jm} g^{kn} E_{lmn}$$

が成り立ち，E_{ijk} と E^{ijk} は互いに基本テンソルによる指標を上げ下げしたものになっている.

2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を反変成分 (a^i), (b^i) または共変成分 (a_i), (b_i) で表して

(4) $$v_i = E_{ijk} a^j b^k, \qquad v^i = E^{ijk} a_j b_k$$

すなわち

$$(5)\quad \begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\mathfrak{g}}\begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ a^3 & b^3 \end{vmatrix}, & v_2 &= \sqrt{\mathfrak{g}}\begin{vmatrix} a^3 & b^3 \\ a^1 & b^1 \end{vmatrix}, & v_3 &= \sqrt{\mathfrak{g}}\begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} \\ v^1 &= \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{g}}}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, & v^2 &= \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{g}}}\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, & v^3 &= \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{g}}}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

とおく. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が絶対ベクトルならば $\boldsymbol{v}$ は有向ベクトルであり, 関係式 (3) によりその成分の間には

$$v_i = g_{ij}v^j, \qquad v^i = g^{ij}v_j$$

が成り立つ.

3個のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の反変成分または共変成分を用いて

$$(6)\quad \begin{aligned} E_{ijk}a^ib^jc^k &= \sqrt{\mathfrak{g}}\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \\ E^{ijk}a_ib_jc_k &= \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{g}}}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

で定義される量は互いに等しく, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が絶対ベクトルならば有向スカラーである. これをベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の**スカラー3重積**といい, $|\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}|$ で表す. 直交基底に関しては $\mathfrak{g}=1$ であるから, この定義は第1章 §1 で定義されたスカラー3重積に一致する.

定理6.1 絶対ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して, 式 (4) で定義された有向ベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のベクトル積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ である. すなわち

(i) $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に垂直である.

(ii) $\boldsymbol{v}$ の長さは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積に等しい.

(iii) $$|\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{v}| \geqq 0$$

[証明] (i) $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v} = a^iE_{ijk}a^jb^k = 0$$

同様に $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}=0$ であり, $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に垂直である.

(ii) $|\boldsymbol{v}|^2 = g^{ij}v_iv_j$ はスカラーであるから, 基底の取り方に無関係である. とくに直交基底 $\Sigma\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ を $\boldsymbol{e}_1 /\!/ \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{e}_2$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の作る平面の中にとれば,

$$\boldsymbol{a}=(a^1,\ 0,\ 0),\qquad \boldsymbol{b}=(b^1,\ b^2,\ 0)$$

$$g_{ij}=\delta_{ij},\qquad \mathfrak{g}=1$$

であるから，式 (5) により

$$v_1=v^1=0,\qquad v_2=v^2=0,\qquad v_3=v^3=a^1b^2$$

ゆえに $\boldsymbol{v}$ の長さは v_3 の絶対値に等しく

$$|\boldsymbol{v}|=|v_3|=|a^1||b^2|$$

であり，$|a^1||b^2|$ は平行四辺形の面積である．

(iii) この証明は問題 **2** とする． ◇

定理 6.2 3 個のベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積はスカラー 3 重積

$$|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}|=E_{ijk}a^ib^jc^k=\sqrt{\mathfrak{g}}\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

の絶対値に等しい．

問　　題

1. 直交基底 $\Sigma\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$ に関して基底 $\Sigma'\{\boldsymbol{e}'_1,\ \boldsymbol{e}'_2,\ \boldsymbol{e}'_3\}$ が

$$\boldsymbol{e}'_a=\overline{A}^i{}_a\boldsymbol{e}_i$$

で表され，Σ' が正の向きをもつとき，$\boldsymbol{e}'_1,\ \boldsymbol{e}'_2,\ \boldsymbol{e}'_3$ の作る平行六面体の体積は $\sqrt{\mathfrak{g}'}=\{\det(g'_{ab})\}^{1/2}$ で与えられることを示せ．

2. 定理 6.1 (iii) を証明せよ．

[解　　答]

1. 直交基底 Σ に関しては，$\boldsymbol{e}'_1,\ \boldsymbol{e}'_2,\ \boldsymbol{e}'_3$ の作る平行六面体の体積は

$$|\boldsymbol{e}'_1\ \ \boldsymbol{e}'_2\ \ \boldsymbol{e}'_3|=\varepsilon_{ijk}\overline{A}^i{}_1\overline{A}^j{}_2\overline{A}^k{}_3=\begin{vmatrix} \overline{A}^1{}_1 & \overline{A}^1{}_2 & \overline{A}^1{}_3 \\ \overline{A}^2{}_1 & \overline{A}^2{}_2 & \overline{A}^2{}_3 \\ \overline{A}^3{}_1 & \overline{A}^3{}_2 & \overline{A}^3{}_3 \end{vmatrix}$$

で与えられる．

$$|\boldsymbol{e}'_1\ \ \boldsymbol{e}'_2\ \ \boldsymbol{e}'_3|^2=\begin{vmatrix} \overline{A}^1{}_1 & \overline{A}^2{}_1 & \overline{A}^3{}_1 \\ \overline{A}^1{}_2 & \overline{A}^2{}_2 & \overline{A}^3{}_2 \\ \overline{A}^1{}_3 & \overline{A}^2{}_3 & \overline{A}^3{}_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \overline{A}^1{}_1 & \overline{A}^1{}_2 & \overline{A}^1{}_3 \\ \overline{A}^2{}_1 & \overline{A}^2{}_2 & \overline{A}^2{}_3 \\ \overline{A}^3{}_1 & \overline{A}^3{}_2 & \overline{A}^3{}_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \overline{A}^i{}_1\overline{A}^i{}_1 & \overline{A}^i{}_1\overline{A}^i{}_2 & \overline{A}^i{}_1\overline{A}^i{}_3 \\ \overline{A}^i{}_2\overline{A}^i{}_1 & \overline{A}^i{}_2\overline{A}^i{}_2 & \overline{A}^i{}_2\overline{A}^i{}_3 \\ \overline{A}^i{}_3\overline{A}^i{}_1 & \overline{A}^i{}_3\overline{A}^i{}_2 & \overline{A}^i{}_3\overline{A}^i{}_3 \end{vmatrix}=\det(g'_{ab})$$

$|\boldsymbol{e}'_1 \ \ \boldsymbol{e}'_2 \ \ \boldsymbol{e}'_3| > 0$ であるから

$$|\boldsymbol{e}'_1 \ \ \boldsymbol{e}'_2 \ \ \boldsymbol{e}'_3| = \sqrt{\mathfrak{g}'}$$

2. $v^k = E^{klm} a_l b_m$ であるから，

$$|\boldsymbol{a} \ \ \boldsymbol{b} \ \ \boldsymbol{v}| = E_{ijk} a^i b^j E^{klm} a_l b_m$$

E_{ijk} についても，公式

$$E_{ijk} E^{klm} = \delta_i{}^l \delta_j{}^m - \delta_i{}^m \delta_j{}^l$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{a} \ \ \boldsymbol{b} \ \ \boldsymbol{v}| &= a^i b^j (\delta_i{}^l \delta_j{}^m - \delta_i{}^m \delta_j{}^l) a_l b_m \\ &= a^i b^j a_i b_j - a^i b^j a_j b_i \\ &= |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 \end{aligned}$$

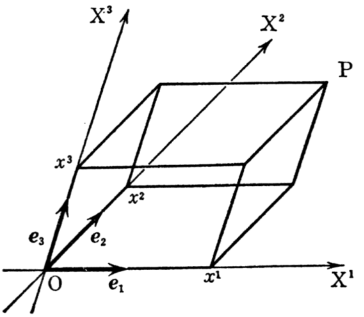
であり，シュワルツの不等式により

$$|\boldsymbol{a} \ \ \boldsymbol{b} \ \ \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 \geqq 0$$

5 一般のテンソル解析

§1. 曲線座標

第1章から第3章まででは，空間の点を表すために直交座標系をとり，その直交基底に関してベクトルやテンソルを表して議論を進めてきた．



5-1 図

空間の点を3個の数の組で表すためには，座標軸が直交座標系のように互いに垂直である必要はない．

いま1点 O で交わり，同一平面上にない3直線 OX^1, OX^2, OX^3 をとり，それらを数直線と考えて，その上の一般の点の座標をそれぞれ x^1, x^2, x^3 で表す．任意の点 P に対して，5-1 図のように O と P を対頂点にもち，OX^1, OX^2, OX^3 上に3辺をもつような平行六面体を作り，OX^1, OX^2, OX^3 上の頂点の座標がそれぞれ x^1, x^2, x^3 であるとき，点 P と3個の数の組 (x^1, x^2, x^3) が1対1に対応する．このとき (x^1, x^2, x^3) を点 P の**斜交座標**といい，$P(x^1, x^2, x^3)$ で表す．このように各点 P に3個の数の組 (x^1, x^2, x^3) を対応させることを**斜交座標系**という．

それぞれの座標軸上の単位点を $E_1(1, 0, 0)$, $E_2(0, 1, 0)$, $E_3(0, 0, 1)$ とし，

$$\boldsymbol{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}, \qquad \boldsymbol{e}_3 = \overrightarrow{OE_3}$$

とするとき，$\Sigma\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ は1つの基底を構成する．E_1, E_2, E_3 を単位点と

いったが，それらは数直線としての座標軸の目盛りがそれぞれ1である点であって，線分 OE_1, OE_2, OE_3 の長さが1であるわけではない．この基底に関して，点 $P(x^1, x^2, x^3)$ の位置ベクトルは

$$\overrightarrow{OP} = x^1 \boldsymbol{e}_1 + x^2 \boldsymbol{e}_2 + x^3 \boldsymbol{e}_3 = x^i \boldsymbol{e}_i$$

で表される．

直交座標系も斜交座標系の特殊な場合であって，これらを**直線座標系**と総称する．本章では，一般的には**曲線座標系**といわれる，その他いろいろの座標系による空間の点の記述方法と，それらに関してベクトルやテンソルがどのように表現され，またそれらがどんな性質をもつかを考えよう．

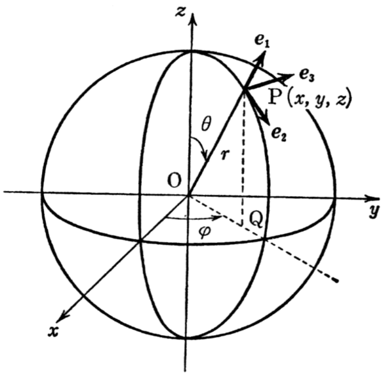
曲線座標系に対して直交座標系は特別な性質をもつので，本章では直交座標系をとくに $(x^a) = (x^1, x^2, x^3)$ で示し，また必要に応じて (x, y, z) で表すことにする．

例 1.1　空間の極座標系　空間の任意の点 $P(x, y, z)$ に対して，原点 O から P までの距離を r とし，O を中心とし半径 r の球面をえがく．z 軸の正の向きと半直線 $\overrightarrow{OP}$ とのなす角を θ とする．また点 P の xy 平面上への正射影を Q として，x 軸と $\overrightarrow{OQ}$ とのなす角を φ とすれば，

$$r \geqq 0, \qquad 0 \leqq \theta \leqq \pi, \qquad 0 \leqq \varphi < 2\pi$$

$$(\text{または } -\pi < \varphi \leqq \pi)$$

の範囲で3つの数 (r, θ, φ) が定まる．直交座標 (x, y, z) との間には関係式



5-2 図

$$
\begin{aligned}
x &= x^1 = r \sin\theta \cos\varphi \\
y &= x^2 = r \sin\theta \sin\varphi \qquad (1) \\
z &= x^3 = r \cos\theta
\end{aligned}
$$

が成り立つ．逆に (r, θ, φ) を与えれば，直交座標 (x, y, z) が定まり，したがって点 P が定まる．このような3つの数の組 (r, θ, φ) を空間の**極座標系**といい，r を点 P の**動径**，θ を**天頂角**，φ を**方位角**という．関係式 (1) を r, θ, φ について解けば

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$(2) \qquad \theta=\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

である．$\tan^{-1}x$ の主値は普通は

$$-\frac{\pi}{2}<\tan^{-1}x<\frac{\pi}{2}$$

の範囲で考えるが，ここでは θ は $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で，φ は xy 平面内で方位角が含まれる象限の角をとる．ただし，原点 $O(r=0)$ に対しては θ と φ は定まらないし，z 軸上の点 ($\theta=0$ または $\theta=\pi$) に対しては φ は一意的に定まらない．

r_0, θ_0, φ_0 はそれぞれ一定値を示すものとして，この極座標系において，次のような点はそれぞれ曲面（平面，半平面などを含む）または曲線（直線，半直線などを含む）をえがく．

$r=r_0$ 　半径 r_0 の球面

$\theta=\theta_0$ 　原点 O を頂点，z 軸を軸とする円錐面

$\varphi=\varphi_0$ 　z 軸を境界にもつ半平面

r : 変化, $\theta=\theta_0$, $\varphi=\varphi_0$ 　原点 O から出る半直線

$r=r_0$, θ : 変化, $\varphi=\varphi_0$ 　半径 r_0 の球面上の経線

$r=r_0$, $\theta=\theta_0$, φ : 変化 　半径 r_0 の球面上の緯線

後半の 3 種の曲線は，前半の 3 種の曲面の交線として得られる． ◇

例 1.2 円柱座標系 点 $P(x, y, z)$ に対して，P から xy 平面上への正射影を Q とする．$OQ=\rho$ とし，点 P の方位角を φ とすれば，

$$\rho\geqq 0, \qquad 0\leqq\varphi<2\pi$$

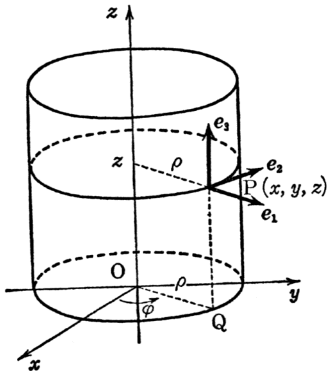
（または $-\pi<\varphi\leqq\pi$），　z は 1 つの実数であるような 3 つの数の組 (ρ, φ, z) が定まる．直交座標との間の関係は

$$x=x^1=\rho\cos\varphi$$

$$(3) \qquad y=x^2=\rho\sin\varphi$$

$$z=x^3=z$$

である．逆に 3 つの数の組 (ρ, φ, z) が与えられ



5-3 図

れば点 P が定まる．このような3つの数の組 (ρ, φ, z) を点 P の**円柱座標**といい，このようにして空間の点を表す方法を**円柱座標系**という．関係式 (3) を ρ, φ, z について解けば

$$
(4)\qquad \begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi &= \tan^{-1}\frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned}
$$

である．方位角について，極座標において述べた注意はこの場合にも適用される．

ρ_0, φ_0, z_0 は定数を示すものとして，この円柱座標系で，次の座標をもつ点はそれぞれの曲面または曲線をえがく．

$\rho=\rho_0$	z 軸を軸とし，半径 ρ_0 の円柱面
$\varphi=\varphi_0$	z 軸を境界にもつ半平面
$z=z_0$	xy 平面に平行な平面
ρ：変化, $\varphi=\varphi_0$, $z=z_0$	平面 $z=z_0$ 上の方位角 φ_0 の半直線
$\rho=\rho_0$, φ：変化, $z=z_0$	平面 $z=z_0$ 上で，$(0, 0, z_0)$ を中心とし半径 ρ_0 の円
$\rho=\rho_0$, $\varphi=\varphi_0$, z：変化	半径 ρ_0 の円柱面の母線

この場合も，後半の3種の曲線は前半の3種の曲面の交線になっている．◇

物理学において，いろいろの現象を記述する場合，直交座標系がつねに便利であるとは限らない．たとえば中心力が作用する場合には極座標系を用いる方が，また円管内の流れに関する問題では円柱座標系による方が式が簡単に表されることがある．また問題によってはその他の特別な座標系を用いることがある．これらはいずれも曲線座標系といわれるものであって，次にその一般的な定義を述べよう．

空間の中で，1つの領域 D の各点 $P(x, y, z)$, $(x^a)=(x, y, z)$ に対して3つの数の組 (u^1, u^2, u^3) が1対1に対応しているとき，その関数関係を

$$
(5)\qquad \begin{aligned} u^1 &= u^1(x, y, z) \\ u^2 &= u^2(x, y, z) \\ u^3 &= u^3(x, y, z) \end{aligned}
$$

と表そう．これを一まとめにして，

$$u^i = u^i(x^1, x^2, x^3) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

と表す．ここで関数 u^1, u^2, u^3 は x^1, x^2, x^3 について必要な次数だけ微分可能であるとする．

微分法における逆関数定理により，数の組 (u^1, u^2, u^3) と領域 D の適当な部分 D' が1対1に対応するための必要十分条件は，関数行列

$$\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^a}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial u^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial u^1}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial u^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial u^2}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial u^3}{\partial x^1} & \dfrac{\partial u^3}{\partial x^2} & \dfrac{\partial u^3}{\partial x^3} \end{pmatrix}$$

の階数が3である．いい替えれば関数行列式が

$$\det\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^a}\right) \neq 0$$

である．そのとき，D' の点に対してその直交座標 (x, y, z) は (u^1, u^2, u^3) の関数として

$$\begin{aligned} x &= x^1 = x^1(u^1, u^2, u^3) \\ y &= x^2 = x^2(u^1, u^2, u^3) \qquad (6) \\ z &= x^3 = x^3(u^1, u^2, u^3) \end{aligned}$$

と表される．これを一まとめにして

$$x^a = x^a(u^i)$$

と書くこともできる．領域 D として，点 P と数の組 (u^1, u^2, u^3) が1対1に対応するような部分 D' そのものを考えることにする．

1点 $P_0 \in D$ に対する数の組を $(u^1{}_0, u^2{}_0, u^3{}_0)$ とするとき，式 (6) で $u^2 = u^2{}_0$, $u^3 = u^3{}_0$ とおけば

$$x^a = x^a(u^1, u^2{}_0, u^3{}_0) \qquad (a = 1, 2, 3)$$

は1個の媒介変数 u^1 の関数であるから，空間の領域 D の中で点 P_0 を通る曲線をえがく．同様に

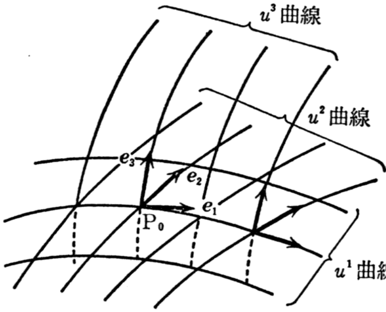
$$x^a = x^a(u^1{}_0, u^2, u^3{}_0)$$

および

$$x^a = x^a(u^1{}_0,\ u^2{}_0,\ u^3)$$

はそれぞれ点 P_0 を通る曲線をえがく．これらの曲線を**座標曲線**という．

このように，領域 D の各点 P を 3 本の座標曲線が通っており，1 組の値 $(u^1{}_0,\ u^2{}_0,\ u^3{}_0)$ を与えれば 1 点 P_0 が定まるから，このような数の組を点 P の**曲線座標**または単に**座標**という．領域 D の各点に曲線座標を与える方法を**曲線座標系**といい，D を**座標近傍**という．



5-4 図

さて，直交座標系にしろ曲線座標系にしろ，それを用いるのは空間内の対象や物理的現象を量化して代数的なまた解析的な手法を適用するためであった．しかし，空間内の対象や現象はそのような座標系とは無関係に実体として存在するはずのものであるから，もし座標系を用いなくても済むならばそれにこしたことはないという考え方がある．これはいままで，ベクトルを太文字で書いたり，テンソルを 1 つの文字で表した記法がそれにあたる．

これと対極的な考え方は，座標系を用いることが便利であり，避けられないものならば，すべての座標系に共通する形で表記することによって，特定の座標系を用いるという特殊化から抜け出そうということである．座標系のすべての取り方に共通に表現される対象は空間内の実体であると考えようというわけである．

空間の各点が 1 つの座標近傍 D の中で曲線座標 (u^i) で表されたとする．そのとき D の中で

(7)　　$$u'^a = u'^a(u^i) \qquad (a = 1, 2, 3)$$

で与えられる 3 個の変数について，関数行列式が

$$\det\left(\frac{\partial u'^a}{\partial u^i}\right) = \frac{\partial(u'^1,\ u'^2,\ u'^3)}{\partial(u^1,\ u^2,\ u^3)} \neq 0$$

ならば，逆に解いて u^i を u'^a の関数として

(8)　$$u^i = u^i(u'^a) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

と表すことができる．(u'^1, u'^2, u'^3) も1つの曲線座標系を与える．式 (7), (8) を曲線座標系の**座標変換**という．

さらに，1組の関数 (u''^1, u''^2, u''^3) が

(9)　$$u''^p = u''^p(u'^1, u'^2, u'^3) \qquad (p = 1, 2, 3)$$

であって，その関数行列式が 0 でないならば，式 (7) を (9) に代入して，u''^p を (u^1, u^2, u^3) の関数

$$u''^p = u''^p(u'^a(u^i))$$

として表すことができる．そのとき

$$\frac{\partial u''^p}{\partial u^i} = \frac{\partial u''^p}{\partial u'^a}\frac{\partial u'^a}{\partial u^i}$$

であり，その関数行列式は

$$\det\left(\frac{\partial u''^p}{\partial u^i}\right) = \det\left(\frac{\partial u''^p}{\partial u'^a}\right)\det\left(\frac{\partial u'^a}{\partial u^i}\right) \neq 0$$

であるから，2つの曲線座標系 (u^i) と (u'^a) との間の一般的な関係はその他の曲線座標系との間においても成り立つ．

したがって，すべての座標系に共通な表示であるかどうかを調べるには，上に述べた2つの曲線座標系 (u^i) と (u'^a) との間の一般的な関係について考えればよい．

例 1.3　直交座標系 $(x^a) = (x, y, z)$ と極座標系 $(u^i) = (r, \theta, \varphi)$ との座標変換 (1) の関数行列式を求めよ．また，その関数行列式の値が 0 になる点を調べよ．

[解]

$$\left(\frac{\partial x^a}{\partial u^i}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ \det\left(\frac{\partial x^a}{\partial u^i}\right) &= r^2(\sin^3\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta\sin\theta\cos^2\varphi \\ &\qquad + \sin^3\theta\cos^2\varphi + \cos^2\theta\sin\theta\sin^2\varphi) \\ &= r^2\sin\theta \end{aligned}$$

この関数行列式が 0 になる点は $r = 0$ または $\theta = 0, \pi$ であり，これらはそれぞれ原点 O または z 軸上の点であって，原点は θ と φ が，また z 軸上の点は φ が一意的に定まらない点である．　◇

問　　題

1. 直交座標系 $(x^a)=(x, y, z)$ と円柱座標系 $(u^i)=(\rho, \varphi, z)$ との座標変換 (3) の関数行列式を求めよ.

2. 直交座標系 (x, y, z) と次の変換式で得られる曲線座標系 (u, v, z) を**楕円柱座標系**という. その座標曲面を調べ, 座標変換の関数行列式を求めよ. (a は正の定数)

$$x=a\cosh u\cos v \qquad \begin{cases} (0\leqq u) \\ (0\leqq v<2\pi) \end{cases}$$
$$y=a\sinh u\sin v$$
$$z=z$$

3. 次の座標変換式で得られる**偏球面座標系** (u, v, φ) について, 前問と同じ問に答えよ.

$$\begin{aligned} x&=a\cosh u\cos v\cos\varphi \\ y&=a\cosh u\cos v\sin\varphi \\ z&=a\sinh u\sin v \end{aligned} \qquad \begin{cases} (0\leqq u) \\ (-\pi/2\leqq v\leqq\pi/2) \\ (0\leqq\varphi<2\pi) \end{cases}$$

4. 次の座標変換式で得られる**回転放物面座標系** (ξ, η, φ) について, 前2問と同じ問に答えよ.

$$x=\xi\eta\cos\varphi, \qquad y=\xi\eta\sin\varphi, \qquad z=\frac{1}{2}(\eta^2-\xi^2)$$
$$(\xi, \eta\geqq 0,\ 0\leqq\varphi<2\pi)$$

[解　　答]

1.
$$\left(\frac{\partial x^a}{\partial u^i}\right)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$\det\left(\frac{\partial x^a}{\partial u^i}\right)=\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)}=\rho(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=\rho$$

この関数行列式は $\rho=0$ の点, すなわち z 軸上で 0 になる.

2. x, y の式から v または u を消去すれば

$$\frac{x^2}{a^2\cosh^2 u}+\frac{y^2}{a^2\sinh^2 u}=1$$
$$\frac{x^2}{a^2\cos^2 v}-\frac{y^2}{a^2\sin^2 v}=1$$

を得る. xy 平面上で第1式は u $(0<u)$ の各値に対して焦点 $(a, 0)$, $(-a, 0)$ をもつ楕円であり, 第2式は v $(0<v<2\pi)$ の各値に対して同じ焦点をもつ双曲線である. これを xy 平面上の**共焦点楕円双曲線群**という.

$u=u_0$ $(0<u_0)$ は楕円柱

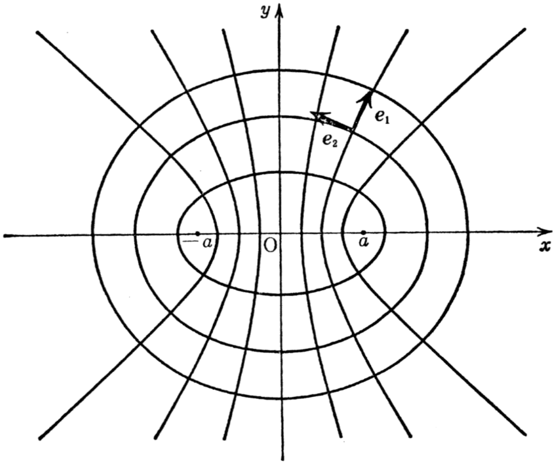
$v = v_0$　$(0 < v_0 < 2\pi)$　は双曲線柱

$z = z_0$　は xy 平面に平行な平面

$$\det\left(\frac{\partial x^a}{\partial u^i}\right) = \begin{vmatrix} a\sinh u\cos v & -a\cosh u\sin v & 0 \\ a\cosh u\sin v & a\sinh u\cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a^2(\sinh^2 u\cos^2 v + \cosh^2 u\sin^2 v)$$

$$= a^2(\sinh^2 u + \sin^2 v)$$



5-5 図

3.　xz 平面上の共焦点楕円双曲線群を z 軸のまわりに回転して得られる曲線座標系であり，

$u = u_0$　$(0 < u_0)$　は回転楕円面

$v = v_0$　$\left(-\frac{\pi}{2} < v_0 < \frac{\pi}{2}\right)$　は回転一葉双曲面

$\varphi = \varphi_0$　$(0 \leqq \varphi_0 < 2\pi)$　は z 軸を境界とする半平面

$$\det\left(\frac{\partial x^a}{\partial u^i}\right) = \begin{vmatrix} a\sinh u\cos v\cos\varphi & -a\cosh u\sin v\cos\varphi & -a\cosh u\cos v\sin\varphi \\ a\sinh u\cos v\sin\varphi & -a\cosh u\sin v\sin\varphi & a\cosh u\cos v\cos\varphi \\ a\cosh u\sin v & a\sinh u\cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -a^3(\sinh^2 u\cosh u\cos^3 v\sin^2\varphi + \cosh^3 u\sin^2 v\cos v\cos^2\varphi$$
$$+ \sinh^2 u\cosh u\cos^3 v\cos^2\varphi + \cosh^3 u\sin^2 v\cos v\sin^2\varphi)$$

$$= -a^3(\sinh^2 u + \sin^2 v)\cosh u\cos v$$

4.　xz 平面 $(\varphi = 0)$ 上で

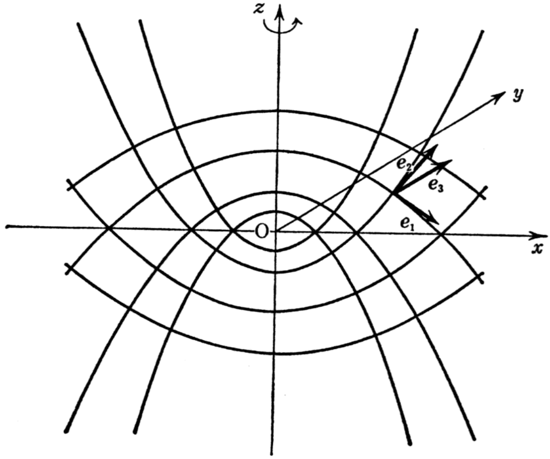
$$x = \xi\eta, \qquad 2z = \eta^2 - \xi^2$$

であり，ξ_0 または η_0 に対して

$$2z=\left(\frac{x}{\xi_0}\right)^2-\xi_0{}^2,\qquad 2z=\eta_0{}^2-\left(\frac{x}{\eta_0}\right)^2$$

となる．前者は下に凸の，後者は上に凸の放物線群を表しており，実はそれらの放物線は互いに直交している．それらの放物線を z 軸のまわりに回転して回転放物面座標系が得られる．

$$\det\left(\frac{\partial x^a}{\partial u^i}\right)=\begin{vmatrix}\eta\cos\varphi & \xi\cos\varphi & -\xi\eta\sin\varphi\\ \eta\sin\varphi & \xi\sin\varphi & \xi\eta\cos\varphi\\ -\xi & \eta & 0\end{vmatrix}=-\xi\eta(\xi^2+\eta^2)$$



5-6 図

§2. 自然基底

直交座標系の有効な点は等質性にある．詳しくいえば，座標軸上に基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ をとるとき，任意の点を始点にもつ有向線分をそれらの1次結合で表すことができ，その成分は有向線分の終点と始点との座標の差であるという自然な意味をもっていた．このような性質に基づいて第 1，2 章の直交テンソルの代数や解析を行ってきた．

曲線座標系に対しては，すべての点でそれに自然に結びつくような基底は存在しない．たとえば極座標系の点 P(r, θ, φ) を通る座標曲線は動径と経線と緯線であって，後者2つは曲線である．仮に動径方向に P を始点とする単位ベクトルを書いたとしても，それは点ごとに向きが異なるものになっている．

このように，曲線座標系を用いる場合，それに自然に結びついてしかも空間の任意の位置にあるベクトルを表すことのできる基底は一般に存在しない．そこで，空間のすべての点に共通な基底をとることはやめて，各点ごとにその点を始点にもつベクトルについて基底の役割を果たすベクトルの組をとることにする．それを基礎にして，一般のテンソル解析を展開することを考えよう．

曲線座標系 (u^1, u^2, u^3) に関して点 P_0 の座標を $(u^1{}_0, u^2{}_0, u^3{}_0)$ とする．直交座標系 (x^1, x^2, x^3) との変換式が

(1)
$$\begin{aligned} x^1 &= x^1(u^1, u^2, u^3) \\ x^2 &= x^2(u^1, u^2, u^3) \\ x^3 &= x^3(u^1, u^2, u^3) \end{aligned}$$

であるとき，点 P_0 における 3 つの座標曲線の接線ベクトルは，直交座標系に関して成分が

(2)
$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial u^1} \\ \dfrac{\partial x^2}{\partial u^1} \\ \dfrac{\partial x^3}{\partial u^1} \end{pmatrix}_0, \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial x^2}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial x^3}{\partial u^2} \end{pmatrix}_0, \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial u^3} \\ \dfrac{\partial x^2}{\partial u^3} \\ \dfrac{\partial x^3}{\partial u^3} \end{pmatrix}_0$$

で与えられるベクトルである．下付きの 0 は点 P_0 における偏微分係数を示している．これらのベクトルを順に $e_1(P_0)$, $e_2(P_0)$, $e_3(P_0)$ とする (5-4 図)．

$$|e_1(P_0) \quad e_2(P_0) \quad e_3(P_0)| = \det\left(\frac{\partial x^a}{\partial u^i}\right)_0 \neq 0$$

であるから，これら 3 個のベクトルは互いに 1 次独立であり，点 P_0 において 1 つの基底 $\Sigma(P_0)$ を作っている．これを曲線座標系 (u^i) に関する点 P_0 における**自然基底**という．

P_0 を始点にもつ任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ を

(3)
$$\boldsymbol{v} = v^1 e_1(P_0) + v^2 e_2(P_0) + v^3 e_3(P_0)$$

と表すとき，$(v^i) = (v^1, v^2, v^3)$ をベクトル $\boldsymbol{v}$ の**曲線座標系** (u^i) **に関する成分**という．

他の曲線座標系 $(u'^a) = (u'^1, u'^2, u'^3)$ に関する点 P_0 における自然基底

$\Sigma'(\mathrm{P}_0)$ は，式 (2) で u^1, u^2, u^3 の代りに u'^1, u'^2, u'^3 とおいて得られるベクトル $\boldsymbol{e}'_1(\mathrm{P}_0)$, $\boldsymbol{e}'_2(\mathrm{P}_0)$, $\boldsymbol{e}'_3(\mathrm{P}_0)$ で構成される．

曲線座標系 (u^i) と (u'^a) の座標変換が

$$u^i = u^i(u'^a)$$

であるとき，

$$\frac{\partial x^p}{\partial u'^a} = \frac{\partial u^i}{\partial u'^a}\frac{\partial x^p}{\partial u^i}$$

であるから，自然基底の変換式

$$(4) \qquad \boldsymbol{e}'_a(\mathrm{P}_0) = \left(\frac{\partial u^i}{\partial u'^a}\right)_0 \boldsymbol{e}_i(\mathrm{P}_0)$$

が成り立つ．あるいは逆に

$$(5) \qquad \boldsymbol{e}_i(\mathrm{P}_0) = \left(\frac{\partial u'^a}{\partial u^i}\right)_0 \boldsymbol{e}'_a(\mathrm{P}_0)$$

である．

ベクトル $\boldsymbol{v}$ の曲線座標系 (u'^a) に関する成分を (v'^a) とすれば，

$$(6) \qquad \boldsymbol{v} = v'^1\boldsymbol{e}'_1(\mathrm{P}_0) + v'^2\boldsymbol{e}'_2(\mathrm{P}_0) + v'^3\boldsymbol{e}'_3(\mathrm{P}_0)$$

である．式 (3) に変換式 (5) を代入したのち，この式 (6) と比較すれば

$$(7) \qquad v'^a = \left(\frac{\partial u'^a}{\partial u^i}\right)_0 v^i$$

である．

$$(8) \qquad A^a{}_i(\mathrm{P}_0) = \left(\frac{\partial u'^a}{\partial u^i}\right)_0, \qquad \overline{A}^i{}_a(\mathrm{P}_0) = \left(\frac{\partial u^i}{\partial u'^a}\right)_0$$

とおくとき，式 (7) は反変ベクトルの成分の変換法則になっている．

曲線座標系 (u^i) に関する1点 P_0 での自然基底 $\Sigma(\mathrm{P}_0)$ の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1(\mathrm{P}_0)$, $\boldsymbol{e}_2(\mathrm{P}_0)$, $\boldsymbol{e}_3(\mathrm{P}_0)$ は必ずしも単位ベクトルでもなければ，互いに直交しているとは限らない．一般には，前節で述べた斜交基底を作っている．したがって，前章で述べたように，反変ベクトル，共変ベクトル，そして一般のテンソルについて考えることができる．基底の変換式で行列 $A = (A^a{}_i)$, $A^{-1} = (\overline{A}^i{}_a)$ が式 (8) で与えられているものとすればよい．

点 P_0 における共変ベクトル $\boldsymbol{a}$ は，点 P_0 における任意の反変ベクトル $\boldsymbol{v}$

についての線形関数

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{v})$$

である．(u^i) の自然基底 $\Sigma(\mathrm{P}_0)$ に関する $\boldsymbol{a}$ の成分は

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{e}_i(\mathrm{P}_0))=\alpha_i$$

によって与えられる．他の曲線座標系 (u'^a) に関する成分を (α'_a) とすれば，座標変換による成分の変換法則は

$$\alpha'_a=\left(\frac{\partial u^i}{\partial u'^a}\right)_0\alpha_i$$

である．

たとえば (1, 2) テンソルは，共変ベクトル $\boldsymbol{a}$，反変ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を変数とする多線形関数

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$$

である．$\Sigma(\mathrm{P}_0)$ の双対基底を $\Sigma^*(\mathrm{P}_0)=\{\boldsymbol{f}^1(\mathrm{P}_0), \boldsymbol{f}^2(\mathrm{P}_0), \boldsymbol{f}^3(\mathrm{P}_0)\}$ とするとき，曲線座標系に関する成分は

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{f}^i(\mathrm{P}_0), \boldsymbol{e}_j(\mathrm{P}_0), \boldsymbol{e}_k(\mathrm{P}_0))=T^i{}_{jk}$$

で与えられる．他の曲線座標系 (u'^a) に関する成分の変換法則は

$$T'^a{}_{bc}=\left(\frac{\partial u'^a}{\partial u^i}\frac{\partial u^j}{\partial u'^b}\frac{\partial u^k}{\partial u'^c}\right)_0 T^i{}_{jk} \tag{9}$$

である．

以上は１点 P_0 だけで自然基底とそれに関する成分を考えてきたが，各点 P にスカラー，ベクトル，またはテンソルが定義されている場合，すなわちスカラー場，ベクトル場，テンソル場を考えよう．

まず，**スカラー場**は各点 P に数値 $f(\mathrm{P})$ を対応させる関数であるから，曲線座標系 (u^i), (u'^a) に関しても各点の座標の関数として

$$f(u^i)=f(u'^a(u^i))$$

であるような関数で表される．

空間の各点 P に対して，反変ベクトル $\boldsymbol{v}(\mathrm{P})$ が定まるとき，それを**反変ベクトル場**という．先の P_0 を一般の点 P でおき換えて考えればよいから，P_0 に特定することを除いて書けば P において曲線座標系 (u^i) の自然基底

$\Sigma\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ に関する成分 $\boldsymbol{v}=(v^i)$ が座標 (u^1, u^2, u^3) の関数である．曲線座標系 (u^i) と (u'^a) の変換による $\boldsymbol{v}$ の成分の変換法則は

$$v'^a = \frac{\partial u'^a}{\partial u^i} v^i, \qquad v^i = \frac{\partial u^i}{\partial u'^a} v'^a$$

である．これらの式で変換の行列 $(\partial u'^a/\partial u^i)$, $(\partial u^i/\partial u'^a)$ も一般に点 P の座標の関数である．

共変ベクトル場，一般の**テンソル場**も同様に定義され，その成分は一般に曲線座標の関数である．

例 2.1　空間の極座標系 (r, θ, φ) に関する各点での自然基底を $\Sigma\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ とし，また直交座標系の基本ベクトルをここでは $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とする（5-2 図）．

（1）$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ で表せ．

（2）逆に $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ を $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ で表せ．

（3）ベクトル $\boldsymbol{v}$ の直交座標系に関する成分を $(V^1\ V^2, V^3)$ とするとき，極座標系に関する $\boldsymbol{v}$ の反変成分 (v^1, v^2, v^3) を求めよ．

［解］（1）この座標変換の行列 $(\partial x^a/\partial u^i)$ は例 1.3 で与えられている．その各列が $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ の直交座標系に関する成分になっているから，

$$\boldsymbol{e}_1 = \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\,\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{e}_2 = r(\cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} - \sin\theta\,\boldsymbol{k})$$
$$\boldsymbol{e}_3 = r\sin\theta(-\sin\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi\,\boldsymbol{j})$$

（2）行列 $(\partial x^a/\partial u^i)$ の逆行列は

$$\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^a}\right) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi & \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi & -\frac{1}{r}\sin\theta \\ -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta} & \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta} & 0 \end{pmatrix}$$

であり，

$$\boldsymbol{i} = \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2 - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{j} = \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2 + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{k} = \cos\theta\,\boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{r}\sin\theta\,\boldsymbol{e}_2$$

と表される．

（3）
$$v^i = \frac{\partial u^i}{\partial x^a} V^a$$

であるから，

$$v^1 = V^1 \sin\theta\cos\varphi + V^2 \sin\theta\sin\varphi + V^3\cos\theta$$

$$v^2 = \frac{1}{r}(V^1\cos\theta\cos\varphi + V^2\cos\theta\sin\varphi - V^3\sin\theta)$$

$$v^3 = \frac{1}{r\sin\theta}(-V^1\sin\varphi + V^2\cos\varphi)$$

と表される．これは

$$\boldsymbol{v} = V^1\boldsymbol{i} + V^2\boldsymbol{j} + V^3\boldsymbol{k}$$

に $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ の式を代入し，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ の係数をまとめて導くこともできる．　◇

基本テンソル $\boldsymbol{g}$ は任意の 2 つのベクトルの内積を与える双線形関数であり，1つの基底に関する成分はその基本ベクトルの内積で与えられることを見てきた．したがって，曲線座標系 (u^i) に関するその成分は各点において

$$g_{ij} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j$$

で与えられ，2階の共変テンソル場になっている．その逆行列を

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$$

とおけば，これは基本テンソルの反変成分を与える．

基本テンソルの共変成分の座標変換による変換法則は

$$g'_{ab} = \frac{\partial u^i}{\partial u'^a}\frac{\partial u^j}{\partial u'^b}g_{ij}, \qquad g_{ij} = \frac{\partial u'^a}{\partial u^i}\frac{\partial u'^b}{\partial u^j}g'_{ab}$$

であるから，第2式を行列の積で表せば

$$(g_{ij}) = {}^t\!\left(\frac{\partial u'^a}{\partial u^i}\right)(g'_{ab})\left(\frac{\partial u'^b}{\partial u^j}\right)$$

と書くことができる．とくに直交座標系 (x^a) に関しては $\boldsymbol{g} = (\delta_{ab})$ であるから，(x^a) から (u^i) への座標変換によって

$$(g_{ij}) = {}^t\!\left(\frac{\partial x^a}{\partial u^i}\right)\left(\frac{\partial x^a}{\partial u^j}\right)$$

として導くことができる．

例 2.2　極座標系 $(u^i) = (r, \theta, \varphi)$ に関する基本テンソルの共変成分と反変成分を求めよ．

［解］ 例 2.1 の自然基底の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ の内積を求めれば

$$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1 = 1, \qquad \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2 = r^2, \qquad \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3 = r^2\sin^2\theta$$

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j = 0 \qquad (i \neq j)$$

であるから,

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta\end{pmatrix}$$

である. 例 1.3 の行列から ${}^t(\partial x^a/\partial u^i)(\partial x^a/\partial u^j)$ を計算してもよい

$\mathfrak{g}=\det(g_{ij})=r^4\sin^2\theta$ であり

$$(g^{ij})=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/r^2 & 0\\ 0 & 0 & 1/(r^2\sin^2\theta)\end{pmatrix}$$ ◇

一般に, $g_{ij}=0$ $(i\neq j)$ であるような曲線座標系では, 3つの座標曲線の接線ベクトルが各点で直交している. このような座標系を**直交曲線座標系**という.

曲線座標系 (u^i) に関してベクトル場 $\boldsymbol{v}=(v^i)$ の各点における長さ $|\boldsymbol{v}|$ は

$$|\boldsymbol{v}|^2=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=g_{ij}v^iv^j$$

で与えられる. とくに, 曲線が媒介変数 t によって

$$\boldsymbol{r}=(u^i(t));\qquad u^i=u^i(t)\qquad (a\leqq t\leqq b)$$

で表されているとき, 各点における接線ベクトルを $d\boldsymbol{r}/dt$ で示すことにすれば, この接線ベクトルは曲線座標系 (u^i) に関して

(10) $$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{du^i}{dt}e_i$$

で表される. 各点 $\mathrm{P}(t)$ におけるその長さの平方は

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|^2=g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}$$

である. したがって点 $\mathrm{P}(a)$ から $\mathrm{P}(t)$ までの曲線の長さ s は, 第2章 §2 で述べたように,

(11) $$s=\int_a^t\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|dt=\int_a^t\sqrt{g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}}\,dt$$

で与えられ, この s を曲線の弧長媒介変数として用いることができる. さらに, この式から微分 ds は

(12) $$ds^2=g_{ij}du^idu^j$$

の形で表され, これはユークリッド空間の線素の曲線座標系 (u^i) における式

であって，**基本 2 次形式**と呼ばれる．極座標系に関する基本２次形式は

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

である．

問　　題

1. 次の各曲線座標系に関する基本テンソルの成分 (g_{ij}) を求めよ

（１） 円柱座標系　　（２） 楕円柱座標系

（３） 偏球面座標系　　（４） 回転放物面座標系

2. 円柱座標系と極座標系との間の座標変換式を求め，円柱座標系に関する基本テンソルの成分から極座標系に関する成分を導け．

[解　　答]

1. §1 の問題の解答の結果を用いて，いずれも直交曲線座標系であることがわかる．対角成分だけを示せば

（１） $g_{11}=1,\ g_{22}=\rho^2,\ g_{33}=1$

（２） $g_{11}=g_{22}=a^2(\sinh^2 u+\sin^2 v),\ g_{33}=1$

（３） $g_{11}=g_{22}=a^2(\sinh^2 u+\sin^2 v),\ g_{33}=a^2\cosh^2 u\cos^2 v$

（４） $g_{11}=g_{22}=\xi^2+\eta^2,\ g_{33}=\xi^2\eta^2$

2. 円柱座標系 (ρ, φ, z) と極座標系 (r, θ, φ) の作り方から

$$\rho = r\sin\theta, \qquad \varphi=\varphi, \qquad z = r\cos\theta$$

である．$(u^i)=(\rho, \varphi, z)$，$(u'^a)=(r, \theta, \varphi)$ とするとき，

$$(g'_{ab}) = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ r\cos\theta & 0 & -r\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ r\cos\theta & 0 & -r\sin\theta \\ 0 & r^2\sin^2\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

§3.　クリストッフェルの記号

前節の式 (10) を微分の記号で表せば

（１）　$$d\boldsymbol{r} = du^i \boldsymbol{e}_i$$

の形に書くことができる．これは，任意の点 $\mathrm{P}(u^i)$ から点 $\bar{\mathrm{P}}(u^i+du^i)$ まで

の変位 $d\boldsymbol{r}$ を P における自然基底 $\Sigma\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ に関して表した式であると考えることができる．その変位の長さ $|d\boldsymbol{r}|$ が線素 ds に等しい．すなわち

$$|d\boldsymbol{r}|^2 = \boldsymbol{g}(du^i\boldsymbol{e}_i,\ du^j\boldsymbol{e}_j) = g_{ij}du^i du^j = ds^2$$

である．

さて，点 $\mathrm{P}(u^i)$ と点 $\bar{\mathrm{P}}(u^i + du^i)$ における自然基底 $\Sigma(\mathrm{P})$ と $\Sigma(\bar{\mathrm{P}})$ は，一般には同じでないから，

$$\boldsymbol{e}_j(\bar{\mathrm{P}}) = \boldsymbol{e}_j(\mathrm{P}) + d\boldsymbol{e}_j$$

とおき，$\Sigma(\mathrm{P})$ に関して

$$d\boldsymbol{e}_j = \omega^i{}_j\boldsymbol{e}_i \tag{2}$$

と表すことができる．ここに $\omega^i{}_j$ は座標の微分 du^i の1次式であり，

$$\omega^i{}_j = \left\{{}_j{}^i{}_k\right\} du^k \tag{3}$$

とおく．この $\omega^i{}_j$ すなわち $\left\{{}_j{}^i{}_k\right\}$ を決定しよう．

座標曲線 u^k の方向の移動に関して，式 (1), (2) はそれぞれ

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_k} = \boldsymbol{e}_k, \qquad \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^j \partial u^k} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial u^k} = \left\{{}_j{}^i{}_k\right\}\boldsymbol{e}_i$$

であるから，$\partial^2\boldsymbol{r}/\partial u^j\partial u^k$ が j と k について対称であるための条件は

$$\left\{{}_j{}^i{}_k\right\} = \left\{{}_k{}^i{}_j\right\} \tag{4}$$

である．

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = g_{ij}$$

の両辺の微分をとり，式 (2) を代入すれば

$$d\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i \cdot d\boldsymbol{e}_j = dg_{ij}$$

$$\omega^l{}_i g_{lj} + g_{il}\omega^l{}_j = dg_{ij}$$

$$\therefore\quad g_{lj}\left\{{}_i{}^l{}_k\right\} + g_{il}\left\{{}_j{}^l{}_k\right\} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \tag{5}$$

を得る．この式で j と k, i と k を入れ換えた次の２つの式

$$g_{lk}\left\{{}_i{}^l{}_j\right\} + g_{il}\left\{{}_k{}^l{}_j\right\} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}, \qquad g_{lj}\left\{{}_k{}^l{}_i\right\} + g_{kl}\left\{{}_j{}^l{}_i\right\} = \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i}$$

を作り，最初の２式の和から第３式を引き，g_{jk} および $\left\{{}_j{}^i{}_k\right\}$ が j と k について対称であることに注意すれば

$$2\,g_{il}\left\{{}_{j}{}^{l}{}_{k}\right\}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}$$

を得る．この式に g^{hi} を掛け i について縮約したのち，指標を書き換えて，$\{{}_{j}{}^{i}{}_{k}\}$ を g_{jk} とその偏導関数で

$$\{{}_{j}{}^{i}{}_{k}\}=\frac{1}{2}\,g^{il}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial u^k}+\frac{\partial g_{lk}}{\partial u^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l}\right) \tag{6}$$

のように表すことができる．$\{{}_{j}{}^{i}{}_{k}\}$ を**クリストッフェルの記号**という．

このクリストッフェルの記号は，曲線座標系の変換の許で，テンソルの変換法則に従わないで，他の変換法則をもっていることを見よう．

基本テンソル $\boldsymbol{g}=(g_{jk})$ の成分の変換法則は

$$g'_{bc}=\frac{\partial u^j}{\partial u'^b}\frac{\partial u^k}{\partial u'^c}g_{jk}$$

である．この両辺を u'^d で偏微分する際，右辺の g_{jk} を u'^d の関数 $u^l=u^l(u'^d)$ の関数と考えれば，

$$\frac{\partial g'_{bc}}{\partial u'^d}=\frac{\partial u^j}{\partial u'^b}\frac{\partial u^k}{\partial u'^c}\frac{\partial u^l}{\partial u'^d}\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l}+\frac{\partial^2 u^j}{\partial u'^b\partial u'^d}\frac{\partial u^k}{\partial u'^c}g_{jk}+\frac{\partial u^j}{\partial u'^b}\frac{\partial^2 u^k}{\partial u'^c\partial u'^d}g_{jk}$$

となる．この式で b と d, c と d を入れ換えた式の和から，この式自身を引けば

$$\frac{\partial g'_{bd}}{\partial u'^c}+\frac{\partial g'_{cd}}{\partial u'^b}-\frac{\partial g'_{bc}}{\partial u'^d}=\frac{\partial u^j}{\partial u'^b}\frac{\partial u^k}{\partial u'^c}\frac{\partial u^l}{\partial u'^d}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^k}+\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l}\right)+2\frac{\partial u^l}{\partial u'^d}\frac{\partial^2 u^j}{\partial u'^b\partial u'^c}g_{jl}$$

となる．基本テンソルの反変成分の変換法則は

$$g'^{ad}=\frac{\partial u'^a}{\partial u^i}\frac{\partial u'^d}{\partial u^h}g^{ih}$$

であるから，上の式の両辺に g'^{ad} を掛けて d について縮約すれば

$$\{{}_{b}{}^{a}{}_{c}\}'=\frac{\partial u'^a}{\partial u^i}\left(\frac{\partial u^j}{\partial u'^b}\frac{\partial u^k}{\partial u'^c}\{{}_{j}{}^{i}{}_{k}\}+\frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^b\partial u'^c}\right) \tag{7}$$

あるいは

(8) $$\frac{\partial u^i}{\partial u'^a}\{{}_b{}^a{}_c\}' = \frac{\partial u^j}{\partial u'^b}\frac{\partial u^k}{\partial u'^c}\{{}_j{}^i{}_k\} + \frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^b \partial u'^c}$$

を得る．逆の変換式は

(9) $$\frac{\partial u'^a}{\partial u^i}\{{}_j{}^i{}_k\} = \frac{\partial u'^b}{\partial u^j}\frac{\partial u'^c}{\partial u^k}\{{}_b{}^a{}_c\}' + \frac{\partial^2 u'^a}{\partial u^j \partial u^k}$$

である．

これらの式は座標変換の 2 次の偏導関数を含んでおり，$\{{}_j{}^i{}_k\}$ はテンソルではない．以上をまとめて述べれば，

定理 3.1 クリストッフェルの記号 $\{{}_j{}^i{}_k\}$ は式 (6) で与えられ，座標変換のもとで変換法則 (8), (9) に従う．下の指標 j と k について対称であり，この性質はすべての座標系に関して共通である．

例 3.1 極座標系において，クリストッフェルの記号の成分をすべて求めよ．

［解］ 極座標系は直交曲線座標系であり，$(u^1, u^2, u^3)=(r, \theta, \varphi)$ として

$$g_{11}=1, \quad g_{22}=r^2, \quad g_{33}=r^2\sin^2\theta$$

$$g^{11}=1, \quad g^{22}=\frac{1}{r^2}, \quad g^{33}=\frac{1}{r^2\sin^2\theta}$$

ゆえに

$$\{{}_j{}^1{}_k\} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{j1}}{\partial u^k}+\frac{\partial g_{k1}}{\partial u^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^1}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{jk}}{\partial r}$$

$$\{{}_j{}^2{}_k\} = \frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial g_{j2}}{\partial u^k}+\frac{\partial g_{k2}}{\partial u^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^2}\right)$$

$$\{{}_j{}^3{}_k\} = \frac{1}{2r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial g_{j3}}{\partial u^k}+\frac{\partial g_{k3}}{\partial u^j}\right)$$

となり，このうち 0 でない成分は

$$\{{}_2{}^1{}_2\} = -r, \qquad \{{}_3{}^1{}_3\} = -r\sin^2\theta$$

$$\{{}_1{}^2{}_2\} = \frac{1}{2r^2}\frac{\partial g_{22}}{\partial r} = \frac{1}{r}, \qquad \{{}_3{}^2{}_3\} = -\frac{1}{2r^2}\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\{{}_1{}^3{}_3\} = \frac{1}{r}, \qquad \{{}_2{}^3{}_3\} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

である．

これらのクリストッフェルの記号の成分を次のようにして求めることもできる．例 2.1 の e_1, e_2, e_3 の式の両辺を微分し，右辺を再び e_1, e_2, e_3 で書き直せば

$$de_1 = \qquad\qquad \frac{1}{r}d\theta e_2 + \qquad \frac{1}{r}d\varphi e_3$$

$$de_2 = - \quad rd\theta e_1 + \quad \frac{1}{r}dre_2 + \quad \frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\varphi e_3$$

$$de_3 = -r\sin^2\theta\, d\varphi e_1 - \sin\theta\cos\theta\, d\varphi e_2 + \left(\frac{1}{r}dr + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta\right)e_3$$

となる．この係数から，たとえば

$$\omega^3{}_3 = \frac{1}{r}dr + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta$$

であり，

$$\{{}_3{}^3{}_1\} = \frac{1}{r}, \qquad \{{}_3{}^3{}_2\} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \qquad \{{}_3{}^3{}_3\} = 0$$ ◇

定理 3.2 座標系 (u^i) が直線座標系であるための必要十分条件は，その座標系に関してクリストッフェルの記号が

$$\{{}_j{}^i{}_k\} = 0$$

であることである．

［証 明］ 必要性 (u^i) が直線座標系ならば，基本テンソル $\boldsymbol{g} = (g_{ij})$ がすべて定数である．ゆえに定義の式 (6) から $\{{}_j{}^i{}_k\} = 0$ が導かれる．

十分性 逆に $\{{}_j{}^i{}_k\} = 0$ ならば，式 (5) により

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = 0$$

ゆえに g_{ij} はすべて定数である． ◇

第4章の定理 5.2 と上の定理 3.2 を合わせれば，$\{{}_j{}^i{}_k\} = 0$ であるような座標系，すなわち斜交座標系から，直交座標系を導くことができる．

一般に，正則行列 $A = (A_{ij})$ の逆行列を $A^{-1} = (A^{ji})$ とし，A の行列式を $|A|$ とすれば，A_{ij} の余因子は $|A|A^{ji}$ である．行列 A の成分が座標の関数であるとき，行列式 $|A|$ の微分は

$$\frac{\partial |A|}{\partial u^k} = |A|A^{ji}\frac{\partial A_{ji}}{\partial u^k}$$

である．したがって

$$(10) \qquad A^{ji}\frac{\partial A_{ji}}{\partial u^k} = \frac{1}{|A|}\frac{\partial |A|}{\partial u^k} = \frac{\partial \log |A|}{\partial u^k}$$

が成り立つ．

クリストッフェルの記号の式 (6) で i と j について縮約すれば

$$\{{}_i{}^i{}_k\} = \frac{1}{2}g^{il}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l}\right) = \frac{1}{2}g^{il}\frac{\partial g_{il}}{\partial u^k}$$

ゆえに

$$\{{}_i{}^i{}_k\}=\frac{1}{2\mathfrak{g}}\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial u^k}=\frac{1}{2}\frac{\partial \log \mathfrak{g}}{\partial u^k} \tag{11}$$

である．また，クリストッフェルの変換法則 (7) で a と b とについて縮約すれば

$$\begin{aligned}\{{}_a{}^a{}_c\}'&=\frac{\partial u'^a}{\partial u^i}\frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^c\partial u'^a}+\frac{\partial u^k}{\partial u'^c}\{{}_i{}^i{}_k\}\\&=\frac{\partial}{\partial u'^c}\log\left|\frac{\partial u^i}{\partial u'^a}\right|+\frac{\partial u^k}{\partial u'^c}\{{}_i{}^i{}_k\}\end{aligned} \tag{12}$$

が成り立つ．

問　　題

1. 基本テンソルの反変成分 (g^{ij}) について，次の方程式が成り立つことを証明せよ．

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}=-g^{lj}\{{}_l{}^i{}_k\}-g^{il}\{{}_l{}^j{}_k\}$$

2. 次の各曲線座標系に関するクリストッフェルの記号の成分を求めよ．

（1） 円柱座標系　　（2） 楕円柱座標系

（3） 偏球面座標系　　（4） 回転放物面座標系

3. 次の座標変換式で与えられる曲線座標系 (u, v, w) を (u^i) として，基本テンソルとクリストッフェルの記号の成分を求めよ．

$$x=u\cos v,\qquad y=u\sin v,\qquad z=v+w$$
$$(u\geqq 0,\ 0\leqq v<2\pi)$$

[解　　答]

1. $g^{ij}g_{jk}=\delta_k{}^i$ の両辺を微分すれば

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial u^l}g_{jk}+g^{ij}\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l}=0\qquad\therefore\quad\frac{\partial g^{ij}}{\partial u^l}=-g^{ih}g^{jk}\frac{\partial g_{hk}}{\partial u^l}$$

これに式 (5) を代入すれば

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial u^l}=-g^{ih}g^{jk}(g_{mk}\{{}_h{}^m{}_l\}+g_{hm}\{{}_k{}^m{}_l\})=-g^{ih}\{{}_h{}^j{}_l\}-g^{jk}\{{}_k{}^i{}_l\}$$

2. いずれも直交曲線座標系であるから，例 3.1 のように，$\{{}_j{}^i{}_k\}$ を $i=1, 2, 3$ に分けると考えやすい．

（1）　$\{{}_j{}^1{}_k\}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{jk}}{\partial \rho},\qquad \{{}_j{}^2{}_k\}=\dfrac{1}{2\rho^2}\left(\dfrac{\partial g_{j2}}{\partial u^k}+\dfrac{\partial g_{k2}}{\partial u^j}\right),\qquad \{{}_j{}^3{}_k\}=0$

0 でない成分は

$$\{{}_2{}^1{}_2\} = -\rho, \qquad \{{}_1{}^2{}_2\} = \frac{1}{\rho}$$

（2）

$$\{{}_j{}^1{}_k\} = \frac{1}{2g_{11}}\left(\frac{\partial g_{j1}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{k1}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^1}\right),$$

$$\{{}_j{}^2{}_k\} = \frac{1}{2g_{22}}\left(\frac{\partial g_{j2}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{k2}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^2}\right), \qquad \{{}_j{}^3{}_k\} = 0$$

0 でない成分は

$$\{{}_1{}^1{}_1\} = -\{{}_2{}^1{}_2\} = \{{}_1{}^2{}_2\} = \frac{\sinh u \cosh u}{\sinh^2 u + \sin^2 v},$$

$$\{{}_1{}^1{}_2\} = -\{{}_1{}^2{}_1\} = \{{}_2{}^2{}_2\} = \frac{\sin v \cos v}{\sinh^2 u + \sin^2 v}$$

（3） $\{{}_j{}^1{}_k\}$, $\{{}_j{}^2{}_k\}$ については (2) の解答の式による.

$$\{{}_j{}^3{}_k\} = \frac{1}{2g_{33}}\left(\frac{\partial g_{j3}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{k3}}{\partial u^j}\right)$$

0 でない成分のうち $\{{}_1{}^1{}_1\} = -\{{}_2{}^1{}_2\} = \{{}_1{}^2{}_2\}$, $\{{}_1{}^1{}_2\} = -\{{}_1{}^2{}_1\} = \{{}_2{}^2{}_2\}$ は (2) に同じ.

$$\{{}_3{}^1{}_3\} = -\frac{\sinh u \cosh u \cos^2 v}{\sinh^2 u + \sin^2 v}, \qquad \{{}_3{}^2{}_3\} = \frac{\cosh^2 u \sin v \cos v}{\sinh^2 u + \sin^2 v}$$

$$\{{}_1{}^3{}_3\} = \frac{\sinh u}{\cosh u}, \qquad \{{}_2{}^3{}_3\} = -\frac{\sin v}{\cos v}$$

（4）

$$\{{}_1{}^1{}_1\} = -\{{}_2{}^1{}_2\} = \{{}_1{}^2{}_2\} = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}, \qquad \{{}_1{}^1{}_2\} = -\{{}_1{}^2{}_1\} = \{{}_2{}^2{}_2\} = \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2},$$

$$\{{}_3{}^1{}_3\} = -\frac{\xi\eta^2}{\xi^2+\eta^2}, \qquad \{{}_3{}^2{}_3\} = -\frac{\xi^2\eta}{\xi^2+\eta^2}, \qquad \{{}_1{}^3{}_3\} = \frac{1}{\xi}, \qquad \{{}_2{}^3{}_3\} = \frac{1}{\eta}$$

3.

$$\left(\frac{\partial x^a}{\partial u^i}\right) = \begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v & 0 \\ \sin v & u\cos v & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(g_{ij}) = {}^t\left(\frac{\partial x^a}{\partial u^i}\right)\left(\frac{\partial x^a}{\partial u^j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u^2+1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{u^2}\begin{pmatrix} u^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & u^2+1 \end{pmatrix}$$

$$\{{}_2{}^1{}_2\} = -u, \quad \{{}_1{}^2{}_2\} = \frac{1}{u}, \quad \text{その他は } 0.$$

§4. 共変微分

第2章で述べた直交テンソル解析でスカラー場 f, ベクトル場 $\boldsymbol{v}=(v_i)$, テンソル場 $\boldsymbol{T}=(T_{ijk})$ の直交座標に関する偏導関数

$$(\partial_i f),\qquad (\partial_i v_i),\qquad (\partial_l T_{ijk})$$

はそれぞれベクトル場，2階のテンソル場，1階高いテンソル場であることを見てきた．

曲線座標系においては，自然基底は空間全体で共通ではなく，各点ごとに選ばれたものであり，ベクトルやテンソルの成分も自然基底に関して表されているから，偏導関数がそのままベクトル場やテンソル場にはならない．偏導関数から構成されるテンソル性をもつ量を作ることを考えよう．

スカラー場 f は各点 P に対して値の定まる関数であるから，座標系 (u^i), (u'^a) に関して

$$f(u'^a)=f(u^i)$$

である．両辺を u'^a で微分し，$u^i=u^i(u'^a)$ と考えれば

$$\frac{\partial f}{\partial u'^a}=\frac{\partial u^i}{\partial u'^a}\frac{\partial f}{\partial u^i}$$

である．これは共変ベクトルの成分の変換法則であり，この共変ベクトル場を

（1）　$$\nabla_i f=\frac{\partial f}{\partial u^i}\qquad \text{まとめて}\qquad \nabla f=(\nabla_i f)$$

で表す．

反変ベクトル場 $\boldsymbol{v}=(v^i)$ の変換法則は

$$v'^a=\frac{\partial u'^a}{\partial u^i}v^i$$

である．この両辺を u'^c で偏微分すれば，

$$\frac{\partial v'^a}{\partial u'^c}=\frac{\partial u'^a}{\partial u^i}\frac{\partial u^k}{\partial u'^c}\frac{\partial v^i}{\partial u^k}+\frac{\partial u^k}{\partial u'^c}\frac{\partial^2 u'^a}{\partial u^j\partial u^k}v^j$$

である．右辺の第2項に §3 の式 (9) を代入すれば

$$\begin{aligned}\frac{\partial v'^a}{\partial u'^c}&=\frac{\partial u'^a}{\partial u^i}\frac{\partial u^k}{\partial u'^c}\frac{\partial v^i}{\partial u^k}+\frac{\partial u^k}{\partial u'^c}\left(\frac{\partial u'^a}{\partial u^i}\left\{{}_j{}^i{}_k\right\}-\frac{\partial u'^b}{\partial u^j}\frac{\partial u'^d}{\partial u^k}\left\{{}_b{}^a{}_d\right\}'\right)v^j\\&=\frac{\partial u'^a}{\partial u^i}\frac{\partial u^k}{\partial u'^c}\frac{\partial v^i}{\partial u^k}+\frac{\partial u^k}{\partial u'^c}\frac{\partial u'^a}{\partial u^i}\left\{{}_j{}^i{}_k\right\}v^j-\left\{{}_b{}^a{}_c\right\}'v'^b\end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{\partial v'^a}{\partial u'^c}+\left\{{}_b{}^a{}_c\right\}'v'^b=\frac{\partial u'^a}{\partial u^i}\frac{\partial u^k}{\partial u'^c}\left(\frac{\partial v^i}{\partial u^k}+\left\{{}_j{}^i{}_k\right\}v^j\right)$$

という関係を得る．いま，座標系 (u^i) で

(2) $$\nabla_k v^i = \frac{\partial v^i}{\partial u^k} + \left\{{}_j{}^i{}_k\right\} v^j$$

とおき，座標系 (u'^a) で同じ形の式を $\nabla_c v'^a$ とおけば，上の式を

$$\nabla_c v'^a = \frac{\partial u'^a}{\partial u^i}\,\frac{\partial u^k}{\partial u'^c}\,\nabla_k v^i$$

のようにまとめることができる．これは (1, 1) テンソルの成分の変換法則であり，このテンソル場を

$$\nabla \boldsymbol{v} = (\nabla_k v^i)$$

で表す．

また，共変ベクトル場 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_j)$ の成分の変換法則は

$$\alpha'_b = \frac{\partial u^j}{\partial u'^b}\,\alpha_j$$

であり，この両辺を u'^c で偏微分し，§3 の式 (8) を代入すれば

$$\begin{aligned}\frac{\partial \alpha'_b}{\partial u'^c} &= \frac{\partial u^j}{\partial u'^b}\,\frac{\partial u^k}{\partial u'^c}\,\frac{\partial \alpha_j}{\partial u^k} + \frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^b \partial u'^c}\,\alpha_i \\ &= \frac{\partial u^j}{\partial u'^b}\,\frac{\partial u^k}{\partial u'^c}\,\frac{\partial \alpha_j}{\partial u^k} + \left(\frac{\partial u^i}{\partial u'^a}\left\{{}_b{}^a{}_c\right\}' - \frac{\partial u^j}{\partial u'^b}\,\frac{\partial u^k}{\partial u'^c}\left\{{}_j{}^i{}_k\right\}\right)\alpha_i\end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{\partial \alpha'_b}{\partial u'^c} - \left\{{}_b{}^a{}_c\right\}'\alpha'_a = \frac{\partial u^j}{\partial u'^b}\,\frac{\partial u^k}{\partial u'^c}\left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial u^k} - \left\{{}_j{}^i{}_k\right\}\alpha_i\right)$$

となる．この式は座標系 (u^i) で

(3) $$\nabla_k \alpha_j = \frac{\partial \alpha_j}{\partial u^k} - \left\{{}_j{}^i{}_k\right\}\alpha_i$$

で定義される量が (0, 2) テンソル場すなわち 2 階の共変テンソル場であることを示している．

さらに，一般にテンソル場 $\boldsymbol{T} = (T^i{}_{jk})$ の変換法則

$$T'^a{}_{bc} = \frac{\partial u'^a}{\partial u^i}\,\frac{\partial u^j}{\partial u'^b}\,\frac{\partial u^k}{\partial u'^c}\,T^i{}_{jk}$$

を (u'^d) で偏微分して，同じ計算を行えば，各座標系で

(4) $$\nabla_l T^i{}_{jk} = \frac{\partial T^i{}_{jk}}{\partial u^l} + \left\{{}_h{}^i{}_l\right\} T^h{}_{jk} - \left\{{}_j{}^h{}_l\right\} T^i{}_{hk} - \left\{{}_k{}^h{}_l\right\} T^i{}_{jh}$$

で定義される量が，指標で示された型のテンソル場をなすことがわかる．このように，(r, s) テンソル場から共変性を 1 階増した微分演算を **共変微分** という．

重さ w のスカラー密度 f の変換法則は

$$f' = \left|\frac{\partial u^i}{\partial u'^a}\right|^w f$$

である．この両辺を u'^c で微分し，§3 の式 (12) を代入すれば

$$\begin{aligned}\frac{\partial f'}{\partial u'^c} &= \left|\frac{\partial u^i}{\partial u'^a}\right|^w \frac{\partial u^k}{\partial u'^c}\frac{\partial f}{\partial u^k} + w\left|\frac{\partial u^i}{\partial u'^a}\right|^{w-1}\left(\frac{\partial}{\partial u'^c}\left|\frac{\partial u^i}{\partial u'^a}\right|\right)f \\ &= \left|\frac{\partial u^i}{\partial u'^a}\right|^w \frac{\partial u^k}{\partial u'^c}\frac{\partial f}{\partial u^k} + w\left|\frac{\partial u^i}{\partial u'^a}\right|^{w}\left(\frac{\partial}{\partial u'^c}\log\left|\frac{\partial u^i}{\partial u'^a}\right|\right)f \\ &= \left|\frac{\partial u^i}{\partial u'^a}\right|^w \frac{\partial u^k}{\partial u'^c}\frac{\partial f}{\partial u^k} + w\left|\frac{\partial u^i}{\partial u'^a}\right|^{w}\left(\left\{{}_a{}^a{}_c\right\}' - \frac{\partial u^k}{\partial u'^c}\left\{{}_i{}^i{}_k\right\}\right)f\end{aligned}$$

であり，これから各座標系において

$$\nabla_k f = \frac{\partial f}{\partial u^k} - w\left\{{}_i{}^i{}_k\right\} f$$

で定義される量が重さ w の共変ベクトル場をなす．一般に重さ w のテンソル密度 $\boldsymbol{T} = (T^i{}_{jk})$ の共変微分は

$$\nabla_l T^i{}_{jk} = \frac{\partial}{\partial u^l} T^i{}_{jk} + \left\{{}_h{}^i{}_l\right\} T^h{}_{jk} - \left\{{}_j{}^h{}_l\right\} T^i{}_{hk} - \left\{{}_k{}^h{}_l\right\} T^i{}_{jh} - w\left\{{}_h{}^h{}_l\right\} T^i{}_{jk}$$

で定義される．これは共変性を 1 階増した重さ w のテンソル密度である．

共変微分もライプニッツの法則を満たしている．すなわち，

定理 4.1 (i) 任意の同じ型のテンソル場 $\boldsymbol{T} = (T^i{}_{jk})$, $\boldsymbol{S} = (S^i{}_{jk})$ の和に対して

$$\nabla(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{S}) = \nabla\boldsymbol{T} + \nabla\boldsymbol{S};$$

$$\nabla_l(T^i{}_{jk} + S^i{}_{jk}) = \nabla_l T^i{}_{jk} + \nabla_l S^i{}_{jk}$$

(ii) 任意のテンソル場 $\boldsymbol{T} = (T^i{}_{jk})$, $\boldsymbol{S} = (S^i{}_j)$ のテンソル積に対して

$$\nabla(\boldsymbol{S} \otimes \boldsymbol{T}) = \nabla\boldsymbol{S} \otimes \boldsymbol{T} + \boldsymbol{S} \otimes \nabla\boldsymbol{T};$$

$$\nabla_m(S^h{}_i T^j{}_{kl}) = (\nabla_m S^h{}_l) T^j{}_{kl} + S^h{}_i(\nabla_m T^j{}_{kl})$$

今後，座標 u^l についての偏微分を ∂_l で示す．

$$\partial_l = \frac{\partial}{\partial u^l}$$

たとえば $(T^i{}_{jk})$ を縮約したテンソル $(T^i{}_{ji})$ は共変ベクトルである．一方，式 (4) で両辺を i と k について縮約すれば

$$\nabla_l T^i{}_{ji} = \partial_l T^i{}_{ji} + \left\{ {}_h{}^i{}_l \right\} T^h{}_{ji} - \left\{ {}_j{}^h{}_l \right\} T^i{}_{hi} - \left\{ {}_i{}^h{}_l \right\} T^i{}_{jh}$$

であり，この右辺の第2項と第4項は同じであるから，

$$\nabla_l T^i{}_{ji} = \partial_l T^i{}_{ji} - \left\{ {}_j{}^h{}_l \right\} T^i{}_{hi}$$

となる．これは $(T^i{}_{ji})$ を共変ベクトル場として共変微分したことにほかならない．ゆえに，

定理 4.2 共変微分と縮約とは順序を交換できる．

基本テンソルなどの基本的な量の共変微分を求めよう．

$$(5) \qquad \begin{aligned} \nabla_k \delta_j{}^i &= \partial_k \delta_j{}^i + \left\{ {}_h{}^i{}_k \right\} \delta_j{}^h - \left\{ {}_j{}^h{}_k \right\} \delta_h{}^i \\ &= \left\{ {}_j{}^i{}_k \right\} - \left\{ {}_j{}^i{}_k \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$\nabla_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - \left\{ {}_i{}^h{}_k \right\} g_{hj} - \left\{ {}_j{}^h{}_k \right\} g_{ih}$$

§3 の式 (5) により

$$(6) \qquad \nabla_k g_{ij} = 0$$

基本テンソルの反変成分 g^{ij} については $g^{ij} g_{jk} = \delta_k{}^i$ である．両辺を共変微分すれば，上の2式から

$$(\nabla_l g^{ij}) g_{jk} = 0$$

であり，したがって

$$\nabla_l g^{ij} = \partial_l g^{ij} + \left\{ {}_h{}^i{}_l \right\} g^{hj} + \left\{ {}_h{}^j{}_l \right\} g^{ih} = 0$$

である．これは §3 の問題 I の方程式と同じである．

$\mathfrak{g} = \det(g_{ij})$ は重さ2のスカラー密度であるから，$\mathfrak{g}$ の共変微分の式を書いて，$\left\{ {}_i{}^i{}_k \right\}$ に §3 の式 (11) を代入すれば

$$(7) \qquad \nabla_k \mathfrak{g} = \partial_k \mathfrak{g} - 2 \left\{ {}_i{}^i{}_k \right\} \mathfrak{g} = 0$$

である．

以上をまとめれば，

定理 4.3 クロネッカーのデルタ $(\delta_j{}^i)$，基本テンソルの共変成分

(g_{ij}), 反変成分 (g^{ij}) について

$$\nabla_k \delta_j{}^i = 0, \qquad \nabla_k g_{ij} = 0, \qquad \nabla_k g^{ij} = 0$$

エディントンのイプシロンの共変成分 ε_{ijk} は重さ -1 の3階のテンソルとみなされるから，その共変微分は

$$\nabla_l \varepsilon_{ijk} = \partial_l \varepsilon_{ijk} - \left\{{}_i{}^h{}_l\right\} \varepsilon_{hjk} - \left\{{}_j{}^h{}_l\right\} \varepsilon_{ihk} - \left\{{}_k{}^h{}_l\right\} \varepsilon_{ijh} + \left\{{}_h{}^h{}_l\right\} \varepsilon_{ijk}$$

である．この式で $i=1, j=2, k=3$ とおいてみれば

$$\begin{aligned} \nabla_l \varepsilon_{123} &= -\left\{{}_1{}^1{}_l\right\} \varepsilon_{123} - \left\{{}_2{}^2{}_l\right\} \varepsilon_{123} - \left\{{}_3{}^3{}_l\right\} \varepsilon_{123} + \left\{{}_h{}^h{}_l\right\} \varepsilon_{123} \\ &= -\left\{{}_h{}^h{}_l\right\} \varepsilon_{123} + \left\{{}_h{}^h{}_l\right\} \varepsilon_{123} = 0 \end{aligned}$$

である．また $i=1, j=1, k=3$ とおけば

$$\begin{aligned} \nabla_l \varepsilon_{113} &= -\left\{{}_1{}^2{}_l\right\} \varepsilon_{213} - \left\{{}_1{}^2{}_l\right\} \varepsilon_{123} \\ &= \left\{{}_1{}^2{}_l\right\} \varepsilon_{123} - \left\{{}_1{}^2{}_l\right\} \varepsilon_{123} = 0 \end{aligned}$$

となり，その他の成分についても同様に

$$(8) \qquad \nabla_l \varepsilon_{ijk} = 0$$

となることがわかる．

式 (7) と (8) により，テンソル場

$$E_{ijk} = \sqrt{\mathfrak{g}}\, \varepsilon_{ijk}, \qquad E^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{g}}} \varepsilon^{ijk}$$

の共変微分も0になる．以上をまとめれば

定理 4.4
$$\nabla_l \varepsilon_{ijk} = 0, \qquad \nabla_l \varepsilon^{ijk} = 0$$
$$\nabla_l E_{ijk} = 0, \qquad \nabla_l E^{ijk} = 0$$

テンソル $\boldsymbol{T} = (T^i{}_j)$ の指標 i を基本テンソルによって下げれば，

$$T_{ij} = g_{ik} T^k{}_j$$

であり，この両辺を共変微分すれば

$$\begin{aligned} \nabla_l T_{ij} &= (\nabla_l g_{ik}) T^k{}_j + g_{ik} (\nabla_l T^k{}_j) \\ &= g_{ik} (\nabla_l T^k{}_j) \end{aligned}$$

となる．これは $(T^i{}_j)$ を共変微分したのち指標を下げたものと一致している．ゆえに

定理 4.5 基本テンソル (g_{ij}), (g^{ij}) による指標の上げ下げと共変微分とは順序を交換できる．

直線座標系 (x^a) においては，クリストッフェルの記号は $\{{}_b{}^a{}_c\}=0$ であるから，任意のテンソル場 $\boldsymbol{T}=(T^a{}_b)$ に対して

$$\nabla_d T^a{}_b = \partial_d T^a{}_b$$

である．

とくに直交座標系に関してテンソル場 $\boldsymbol{T}$ の成分 $T^a{}_b$ が定数ならば

$$\nabla_d T^a{}_b = \partial_d T^a{}_b = 0$$

である．そのテンソル場の曲線座標系 $(\boldsymbol{u}^i)$ に関する成分は必ずしも定数でないが，その共変微分

$$\nabla_l T^i{}_j = \partial_l T^i{}_j + \{{}_k{}^i{}_l\} T^k{}_j - \{{}_j{}^k{}_l\} T^i{}_k$$

は各点でテンソルの性質をもつから 0 である．ゆえに曲線座標系に関しても

$$\nabla_l T^i{}_j = 0$$

が成り立つ． このようなテンソル場は**平行**であるまたは**共変的に一定**であるという．基本テンソルはこの性質をもっている．

平行なベクトル場について次のように考えることができる．曲線座標系 $(\boldsymbol{u}^i)$ の自然基底 $\Sigma\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ を用いて，ベクトル場 $\boldsymbol{v}=(v^i)$ は

$$\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{e}_i$$

と表される． ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ が平行であることは，$\boldsymbol{v}$ が定ベクトルであることであるから，その微分をとれば §3 の (2) により

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{v} &= (dv^i)\boldsymbol{e}_i + v^j d\boldsymbol{e}_j = (dv^i)\boldsymbol{e}_i + v^j \omega^i{}_j \boldsymbol{e}_i \\ &= (\partial_l v^i + \{{}_j{}^i{}_l\} v^j) du^l \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

ゆえに，$\boldsymbol{v}$ が平行であるための必要十分条件は

$$\nabla_l v^i = \partial_l v^i + \{{}_j{}^i{}_l\} v^j = 0$$

である．

第 2 章で直交テンソルに対して勾配，発散，回転が定義された．曲線座標系に関しては， 2 章で用いられた ∇ を共変微分と考えることによって，同じ式で定義される． 1 つのテンソルの成分について，指標の上げ下げと共変微分は交換可能だから，どちらの成分を用いてもよい．しかし縮約の場合には反変性と共変性の指標とについて行わなければならない．

スカラー場 f，ベクトル場 $\boldsymbol{a}=(a^i)$，テンソル場 $\boldsymbol{T}=(T_{ij})$ の勾配は

$$\nabla_j f, \qquad \nabla_j a^i, \qquad \nabla_k T_{ij}$$

ベクトル場 $\boldsymbol{a}=(a^i)$，テンソル場 $\boldsymbol{T}=(T_{ij})$ の発散は

$$\nabla_i a^i = g^{ij}\nabla_i a_j, \qquad \nabla_i T^i{}_j = g^{ik}\nabla_k T_{ij}$$

ベクトル場 $\boldsymbol{a}$ の回転は

$$E^{ijk}\nabla_j a_k$$

で定義される．

$$\nabla_j a_k = \partial_j a_k - \{{}_k{}^h{}_j\} a_h$$

であり，$\{{}_k{}^h{}_j\}$ は j と k について対称であるから，回転は

$$E^{ijk}\partial_j a_k$$

と表すことができる．

ラプラシアン Δ は，スカラー場 f あるいはベクトル場 $\boldsymbol{a}$ に対して

$$\Delta f = g^{ij}\nabla_i\nabla_j f, \qquad \Delta a^h = g^{ij}\nabla_i\nabla_j a^h$$

で定義される．これらはそれぞれスカラー場，ベクトル場である．

ベクトルの発散について公式

$$\nabla_i a^i = \partial_i a^i + \{{}_j{}^i{}_i\} a^j = \partial_i a^i + \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{g}}}(\partial_i \sqrt{\mathfrak{g}})a^i$$

(9)

$$= \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{g}}}\partial_i(\sqrt{\mathfrak{g}}\, a^i)$$

が成り立ち，したがってラプラシアンは

(10) $$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{g}}}\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\sqrt{\mathfrak{g}}\, g^{ij}\frac{\partial f}{\partial u^j}\right)$$

の形に表される．

第2章あるいは第3章で直交テンソルについて述べられた方程式は，共変微分を用いれば曲線座標系においても不変な形で述べることができる．たとえば，連続性の方程式（第3章，§1 (6)）は

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla_i v^i = 0$$

理想流体についてのオイラーの方程式（同 (8)）は

$$\frac{\partial v^i}{\partial t}+v^j\nabla_j v^i=f^i-\frac{1}{\rho}g^{ij}\nabla_j p$$

ひずみ－応力方程式（第3章，§2（13））は

$$T_{ij}=C_{ijkl}E^{kl}$$

アンペールの法則に同値な方程式（第3章，§3（8））は

$$g^{kj}\nabla_k H_{ij}-\varepsilon_0\frac{\partial E_i}{\partial t}=j_i$$

ストークスの定理（第2章，定理 6.3）は

$$\iint_S E^{ijk}(\nabla_j v_k)n_i dS=\int_C v_i du^i$$

例 4.1 極座標系においてラプラシアンの式を表せ.

［解］ 例 2.2 により

$$\mathfrak{g}=r^4\sin^2\theta,\quad g^{11}=1,\quad g^{22}=\frac{1}{r^2},\quad g^{33}=\frac{1}{r^2\sin^2\theta}$$

であるから，式(10)により

$$\Delta f=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)\right]$$

問　題

1. $\nabla_k(v^i w_i)=(\nabla_k v^i)w_i+v^i(\nabla_k w_i)$ を証明せよ.

2. 円柱座標系においてラプラシアンの式を表せ.

3. 曲線 C が曲線座標系において媒介変数方程式 $u^i=u^i(t)$ で表されその各点 P(t) で反変ベクトル $v(t)$ が与えられているとき，

$$\frac{\delta v^i}{dt}=\frac{dv^i}{dt}+\left\{{}_j{}^i{}_k\right\}v^j\frac{du^k}{dt}$$

で定義される量は反変ベクトルであることを示せ. $\delta v/dt=(\delta v^i/dt)$ を**曲線 C に沿っての共変微分**という. 一般に，曲線に沿ってのテンソル場 $T(t)=(T^i{}_j(t))$ に対して，C に沿っての共変微分は次の式で定義される.

$$\frac{\delta T^i{}_j}{dt}=\frac{dT^i{}_j}{dt}+\left\{{}_l{}^i{}_k\right\}T^l{}_j\frac{du^k}{dt}-\left\{{}_j{}^l{}_k\right\}T^i{}_l\frac{du^k}{dt}$$

4. 曲線座標系において，直線 $u^i=u^i(t)$ は微分方程式

$$\frac{\delta^2 u^i}{dt^2}=\frac{d^2u^i}{dt^2}+\left\{{}_j{}^i{}_k\right\}\frac{du^j}{dt}\frac{du^k}{dt}=\alpha\frac{du^i}{dt}$$

で特徴づけられる. α は比例因数である. とくに弧長媒介変数 s については

$$\frac{\delta^2 u^i}{ds^2}=\frac{d^2u^i}{ds^2}+\{{}_j{}^i{}_k\}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}=0$$

であることを証明せよ.

[解　　答]

1. $v^i w_i$ はスカラー場であるから

$$\nabla_k(v^i w_i)=\partial_k(v^i w_i)=(\partial_k v^i)w_i+v^i(\partial_k w_i)$$

一方

$$(\nabla_k v^i)w_i+v^i(\nabla_k w_i)=(\partial_k v^i+\{{}_j{}^i{}_k\}v^j)w_i+v^j(\partial_k w_j-\{{}_j{}^i{}_k\}w_i)$$
$$=(\partial_k v^i)w_i+v^j(\partial_k w_j)$$

2. §2 問題1 (1) の結果から, $\mathfrak{g}=\rho^2$, $g^{11}=1$, $g^{22}=\dfrac{1}{\rho^2}$, $g^{33}=1$ である. ゆえに

$$\Delta f=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

3. 他の座標系 (u'^a) において曲線 C は $u'^a(t)=u'^a(u^i(t))$ で表される. $\boldsymbol{v}(t)$ の成分は C の各点において変換法則

$$v'^a(t)=\frac{\partial u'^a}{\partial u^i}v^i(t)$$

に従う. 両辺を t で微分すれば

$$\frac{dv'^a}{dt}=\frac{\partial u'^a}{\partial u^i}\frac{dv^i}{dt}+\frac{\partial^2 u'^a}{\partial u^j\partial u^k}v^j\frac{du^k}{dt}$$

これにクリストッフェルの記号の変換式を代入すれば

$$\frac{\delta v'^a}{dt}=\frac{\partial u'^a}{\partial u^i}\frac{\delta v^i}{dt}$$

を得る.

4. 直交座標系 (x^a) において点 $\mathrm{A}(a^a)$ を通り方向ベクトル $\boldsymbol{b}=(b^a)$ をもつ直線は方程式

$$\frac{x^1-a^1}{b^1}=\frac{x^2-a^2}{b^2}=\frac{x^3-a^3}{b^3} \qquad ①$$

を満たす. 媒介変数方程式 $x^a=x^a(t)$ で表された点がつねにこの直線上にあるとき, 式①に $x^a(t)$ を代入した式は恒等的に成り立つ. その式を t について2回微分すれば

$$\frac{\dfrac{dx^1}{dt}}{b^1}=\frac{\dfrac{dx^2}{dt}}{b^2}=\frac{\dfrac{dx^3}{dt}}{b^3},\qquad \frac{\dfrac{d^2x^1}{dt^2}}{b^1}=\frac{\dfrac{d^2x^2}{dt^2}}{b^2}=\frac{\dfrac{d^2x^3}{dt^2}}{b^3}$$

が成り立つから, 比例式

$$\frac{d^2x^a}{dt^2}=\alpha\frac{dx^a}{dt} \qquad ②$$

が成り立つ. 直交座標系において dx^a/dt, d^2x^a/dt^2 は反変ベクトルであるから, 曲

線座標系に変換したとき方程式②は

$$\frac{\delta^2 u^i}{dt^2}=\alpha\frac{du^i}{dt}$$

となる.

弧長媒介変数 s に関して du^i/ds は曲線の単位接線ベクトルであるから

$$g_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}=1$$

である. この両辺を曲線に沿って共変微分すれば,

$$\frac{\delta}{ds}g_{ij}=(\nabla_k g_{ij})\frac{dx^k}{dt}=0$$

であるから,

$$g_{ij}\frac{\delta^2 u^i}{ds^2}\frac{du^j}{ds}+g_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{\delta^2 u^j}{ds^2}=2\alpha=0$$

ゆえに $\alpha=0$ である.

§5. 直交曲線座標系

曲線座標系 (u^i) の各点における自然基底 $\Sigma\{e_1, e_2, e_3\}$ のベクトルが互いに直交しているとき, すなわち座標曲線が各点で互いに直交しているとき, (u^i) を直交曲線座標系といった. その座標系では基本テンソルの成分は

$$g_{ij}=e_i\cdot e_j=0 \qquad (i\neq j)$$

である.

極座標系, 円柱座標系, その他 §1 の問題であげた曲線はいずれも直交曲線座標系であり, 応用上もしばしば用いられる. 各点における直交性を利用して, 自然基底 Σ の代りに, 各点に直交基底を設け, それに関してベクトルやテンソルなどを記述する方法がしばしば用いられる.

一般の, 曲線座標系 (u^i) に関して, たとえば

$$g_{11}=|e_1|^2>0$$

であり, 同様にして基本テンソルの対角成分はつねに正である. とくに直交曲線座標系において

(1)　$$g_{11}=h_1^2, \qquad g_{22}=h_2^2, \qquad g_{33}=h_3^2 \qquad (h_i>0)$$

とおく. h_1, h_2, h_3 はそれぞれ e_1, e_2, e_3 の長さである.

(2)　$$a_1=\frac{e_1}{h_1}, \qquad a_2=\frac{e_2}{h_2}, \qquad a_3=\frac{e_3}{h_3}$$

とおけば，これらは単位ベクトルであり，各点において直交基底 $\overline{\Sigma}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ を作る．

任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ を $\overline{\Sigma}$ に対して

$$\boldsymbol{v}=\bar{v}_1\boldsymbol{a}_1+\bar{v}_2\boldsymbol{a}_2+\bar{v}_3\boldsymbol{a}_3$$

と表したとき，$(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ を $\boldsymbol{v}$ の**直交曲線座標系に関する成分**ということが多い．$\overline{\Sigma}$ が直交基底であるから，この成分については反変性と共変性の区別はない．

$$\boldsymbol{v}=\frac{\bar{v}_1}{h_1}\boldsymbol{e}_1+\frac{\bar{v}_2}{h_2}\boldsymbol{e}_2+\frac{\bar{v}_3}{h_3}\boldsymbol{e}_3$$

であるから，$\boldsymbol{v}$ の反変成分 (v^i) との関係は

$$(3)\qquad \bar{v}_1=h_1v^1,\qquad \bar{v}_2=h_2v^2,\qquad \bar{v}_3=h_3v^3$$

である．また $\boldsymbol{v}$ の共変成分 (v_i) は

$$v_j=g_{ij}v^i;\qquad v_1=h_1{}^2v^1,\quad v_2=h_2{}^2v^2,\quad v_3=h_3{}^2v^3$$

であるから，$(\bar{v}_i)$ と (v_i) との関係は

$$(4)\qquad \bar{v}_1=\frac{v_1}{h_1},\qquad \bar{v}_2=\frac{v_2}{h_2},\qquad \bar{v}_3=\frac{v_3}{h_3}$$

で与えられる．

例 5.1 直交座標系 (x^a) に関するベクトル $\boldsymbol{v}$ の成分を (V^1, V^2, V^3) とする．極座標系 (r, θ, φ) の直交基底を $\overline{\Sigma}\{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi}\}$ とし，ベクトル $\boldsymbol{v}$ の $\overline{\Sigma}$ に関する成分を $(v_r, v_\theta, v_\varphi)$ とするとき，その成分を (V^1, V^2, V^3) で表せ．

［解］
$$g_{11}=1,\qquad g_{22}=r^2,\qquad g_{33}=r^2\sin^2\theta$$
$$\therefore\quad h_1=1,\qquad h_2=r,\qquad h_3=r\sin\theta$$

極座標系の自然基底 $\Sigma\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ とそれに関する $\boldsymbol{v}$ の反変成分は例 2.1 で求められている．

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_1,\qquad \boldsymbol{\theta}=\frac{1}{r}\boldsymbol{e}_2,\qquad \boldsymbol{\varphi}=\frac{1}{r\sin\theta}\boldsymbol{e}_3$$

であり，

$$v_r=v^1=V^1\sin\theta\cos\varphi+V^2\sin\theta\sin\varphi+V^3\cos\theta$$
$$v_\theta=rv^2=V^1\cos\theta\cos\varphi+V^2\cos\theta\sin\varphi-V^3\sin\theta$$
$$v_\varphi=r\sin\theta v^3=-V^1\sin\varphi+V^2\cos\varphi$$
◇

この例のように，曲線座標の直交基底 $\overline{\Sigma}$ の基本ベクトルを座標変数の対応する太文字で，またベクトルの成分をそれぞれの座標変数を指標として示すこ

とが多い．たとえば，(u, v, w) が直交曲線座標系ならば，その直交基底を $\bar{\Sigma}\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$，ベクトル $\boldsymbol{v}$ の成分を (v_u, v_v, v_w) で示す．

スカラー場 f の勾配ベクトルは自然基底 Σ に関して共変成分

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial u^1},\ \frac{\partial f}{\partial u^2},\ \frac{\partial f}{\partial u^3}\right)$$

で与えられるから，直交基底 $\bar{\Sigma}$ に関しては式 (4) により

$$(5)\qquad \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u^1},\qquad \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u^2},\qquad \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u^3}$$

である．

$$\sqrt{\mathfrak{g}}=h_1h_2h_3$$

であるから，ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の発散は §4 の式 (9) により

(6)

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}(h_2h_3\bar{v}_1)+\frac{\partial}{\partial u^2}(h_1h_3\bar{v}_2)+\frac{\partial}{\partial u^3}(h_1h_2\bar{v}_3)\right]$$

で表される．したがってラプラシアンは，式 (5) を (6) に代入して

(7)

$$\Delta f=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u^1}\right)+\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u^2}\right)+\frac{\partial}{\partial u^3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u^3}\right)\right]$$

である．

ベクトル $\boldsymbol{v}$ の回転の反変成分は

$$E^{ijk}\partial_j v_k=\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{g}}}\varepsilon^{ijk}\partial_j v_k$$

であるから，$\bar{\Sigma}$ に関する第1の成分は式 (3) と (4) を用いて

$$\frac{h_1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial v_3}{\partial u^2}-\frac{\partial v_2}{\partial u^3}\right)=\frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial(h_3\bar{v}_3)}{\partial u^2}-\frac{\partial(h_2\bar{v}_2)}{\partial u^3}\right]$$

で与えられる．第2，第3の成分は指標 1, 2, 3 を循環的に入れ換えればよい．形式的に

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{g}}}\varepsilon^{ijk}\boldsymbol{e}_i\partial_j v_k=\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{g}}}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$$

と書くことができるから，これに直交基底 $\overline{\Sigma}$ に関する成分などを代入して

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\boldsymbol{a}_1 & h_2\boldsymbol{a}_2 & h_3\boldsymbol{a}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ h_1\bar{v}_1 & h_2\bar{v}_2 & h_3\bar{v}_3 \end{vmatrix}$$

とまとめて書くこともある．

問　　題

1. 極座標系 (r, θ, φ) における勾配，発散，回転，ラプラシアンを直交基底 $\overline{\Sigma}$ に関する成分で表せ．

2. $f(r)$ が $r=\overline{\mathrm{OP}}$ だけの関数であるとき，スカラー場 $f(r)$ の勾配とラプラシアン，ベクトル場 $\boldsymbol{v}=f(r)\boldsymbol{r}$ の発散と回転を求めよ．その結果を $f(r)=r^n$ の場合に適用せよ．

3. 円柱座標系 (ρ, φ, z) における勾配，発散，回転，ラプラシアンを，直交基底 $\overline{\Sigma}\{\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{k}\}$ に関する成分で表せ．

4. 直交座標系 (x, y, z) に関して，ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ が

$$\boldsymbol{v}=\left(-\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2},\ 0\right)$$

であるとき，

（1） $\boldsymbol{v}$ を円柱座標系で表せ．

（2） $\boldsymbol{v}$ の発散と回転を求めよ．

[解　　答]

1. $h_1=1,\ h_2=r,\ h_3=r\sin\theta$ であるから，

勾配　$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial r},\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta},\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)$$

発散　$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial(r^2\sin\theta\, v_r)}{\partial r}+\frac{\partial(r\sin\theta\, v_\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial\varphi}\right]$$
$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2v_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, v_\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}$$

ラプラシアン　$$\Delta f=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)$$
$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

回転　$$(\nabla\times\boldsymbol{v})_r=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial(r\sin\theta\, v_\varphi)}{\partial\theta}-\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial\varphi}\right)$$
$$=\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta\, v_\varphi)}{\partial\theta}-\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}\right)$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{v})_\theta=\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial(r\sin\theta\, v_\varphi)}{\partial r}\right)$$

$$=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r}\right)$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{v})_\varphi=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)$$

2. 勾配　$\nabla f(r)=(f'(r),0,0)=f'(r)\boldsymbol{r}$;　$\nabla r^n=nr^{n-1}\boldsymbol{r}$

発散　$f(r)\boldsymbol{r}$ の成分は $v_r=f(r)$, $v_\theta=v_\varphi=0$ であるから

$$\nabla\cdot(f(r)\boldsymbol{r})=\frac{1}{r^2}\{r^2f(r)\}'=\frac{2}{r}f(r)+f'(r);\quad \nabla\cdot(r^n\boldsymbol{r})=(n+2)r^{n-1}$$

ラプラシアン　$\Delta f(r)=\nabla\cdot(f'(r)\boldsymbol{r})=\dfrac{2}{r}f'(r)+f''(r)$;

$$\Delta r^n=(n+1)nr^{n-2}$$

回転　$\nabla\times\{f(r)\boldsymbol{r}\}=\boldsymbol{0}$

3. $h_1=1$, $h_2=\rho$, $h_3=1$, $\mathfrak{g}=\rho$ であるから,

勾配　$\nabla f=\left(\dfrac{\partial f}{\partial\rho},\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial f}{\partial\varphi},\ \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$

発散　$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\dfrac{1}{\rho}\left[\dfrac{\partial(\rho v_\rho)}{\partial\rho}+\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right]$

$$=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho v_\rho)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

ラプラシアン　$\Delta f=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

回転　$(\nabla\times\boldsymbol{v})_\rho=\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial v_z}{\partial\varphi}-\dfrac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial z}\right)=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v_z}{\partial\varphi}-\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial z}$

$$(\nabla\times\boldsymbol{v})_\varphi=\frac{\partial v_\rho}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial\rho},\qquad (\nabla\times\boldsymbol{v})_z=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial\rho}-\frac{\partial v_\rho}{\partial\varphi}\right)$$

4. 座標変換式は $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$. 円柱座標系 (ρ,φ,z) の自然基底 $\Sigma\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ は

$$\boldsymbol{e}_1=\cos\varphi\,\boldsymbol{i}+\sin\varphi\,\boldsymbol{j},\qquad \boldsymbol{e}_2=-\rho\sin\varphi\,\boldsymbol{i}+\rho\cos\varphi\,\boldsymbol{j},\qquad \boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{k},$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{e}_1=\cos\varphi\,\boldsymbol{i}+\sin\varphi\,\boldsymbol{j},\qquad \boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{e}_2/\rho=-\sin\varphi\,\boldsymbol{i}+\cos\varphi\,\boldsymbol{j},\qquad \boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}$$

(1)　$\boldsymbol{v}=\dfrac{1}{\rho}(-\sin\varphi\,\boldsymbol{i}+\cos\varphi\,\boldsymbol{j})=\dfrac{1}{\rho}\boldsymbol{\varphi}$,　$v_\rho=0$, $v_\varphi=\dfrac{1}{\rho}$, $v_z=0$

(2)　$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$,　$\nabla\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$

§6. 曲率テンソル

反変ベクトル場 $\boldsymbol{v}=(v^i)$ の共変微分 $\nabla_k v^i$ は (1, 1) テンソル場であるから，それをさらに共変微分すれば (1, 2) テンソル場 $\nabla_l\nabla_k v^i$ が得られる．そ

の成分 $\nabla_l\nabla_k v^i$ と $\nabla_k\nabla_l v^i$ との関係，一般にテンソルの2回共変微分の交換公式，をまず形式的に求めよう．

スカラー場 f に対しては

$$\nabla_k f = \partial_k f$$

$$\nabla_l\nabla_k f = \partial_l\nabla_k f - \{{}_k{}^i{}_l\}\nabla_i f$$

$$= \partial_l\partial_k f - \{{}_k{}^i{}_l\}\partial_i f$$

である．f の微分可能性を仮定しておけば

$$\partial_l\partial_k f = \frac{\partial^2 f}{\partial u^k \partial u^l} = \partial_k\partial_l f$$

が成り立つ．またクリストッフェルの記号 $\{{}_k{}^i{}_l\}$ は k と l について対称であるから，

$$\nabla_l\nabla_k f = \nabla_k\nabla_l f$$

すなわち

$$(1) \qquad \nabla_l\nabla_k f - \nabla_k\nabla_l f = 0$$

が成り立つ．

反変ベクトル場 $\boldsymbol{v} = (v^i)$ に対して

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \{{}_j{}^i{}_k\}v^j$$

$$\nabla_l\nabla_k v^i = \partial_l(\nabla_k v^i) + \{{}_j{}^i{}_l\}\nabla_k v^j - \{{}_k{}^j{}_l\}\nabla_j v^i$$

$$= \partial_l\partial_k v^i + (\partial_l\{{}_j{}^i{}_k\})v^j + \{{}_j{}^i{}_k\}\partial_l v^j$$

$$+ \{{}_j{}^i{}_l\}(\partial_k v^j + \{{}_h{}^j{}_k\}v^h) - \{{}_k{}^j{}_l\}\nabla_j v^i$$

である．最後の式で k と l を入れ換えて引算し，総和をとっている指標を書き替えれば

$$\nabla_l\nabla_k v^i - \nabla_k\nabla_l v^i$$

$$(2) \qquad = (\partial_l\{{}_j{}^i{}_k\} - \partial_k\{{}_j{}^i{}_l\} + \{{}_j{}^h{}_k\}\{{}_h{}^i{}_l\} - \{{}_j{}^h{}_l\}\{{}_h{}^i{}_k\})v^j$$

を得る．この（　）の中の式を

$$(3) \qquad R^i{}_{jkl} = \partial_l\{{}_j{}^i{}_k\} - \partial_k\{{}_j{}^i{}_l\} + \{{}_j{}^h{}_k\}\{{}_h{}^i{}_l\} - \{{}_j{}^h{}_l\}\{{}_h{}^i{}_k\}$$

とおけば，式 (2) を

$$(4) \qquad \nabla_l\nabla_k v^i - \nabla_k\nabla_l v^i = R^i{}_{jkl}v^j$$

と書くことができる．

次に，共変ベクトル場 $\boldsymbol{a}=(\alpha_j)$ に対しては

$$\nabla_k\alpha_j=\partial_k\alpha_j-\{{}_j{}^i{}_k\}\alpha_i$$

$$\begin{aligned}\nabla_l\nabla_k\alpha_j&=\partial_l(\nabla_k\alpha_j)-\{{}_j{}^h{}_l\}\nabla_k\alpha_h-\{{}_k{}^h{}_l\}\nabla_h\alpha_j\\&=\partial_l\partial_k\alpha_j-(\partial_l\{{}_j{}^i{}_k\})\alpha_i-\{{}_j{}^i{}_k\}\partial_l\alpha_i\\&\quad-\{{}_j{}^h{}_l\}(\partial_k\alpha_h-\{{}_h{}^i{}_k\}\alpha_i)-\{{}_k{}^h{}_l\}\nabla_h\alpha_j\end{aligned}$$

である．前と同様にここで k と l を入れ換えて引き算すれば

$$\begin{aligned}&\nabla_l\nabla_k\alpha_j-\nabla_k\nabla_l\alpha_j\\&=-(\partial_l\{{}_j{}^i{}_k\}-\partial_k\{{}_j{}^i{}_l\}+\{{}_j{}^h{}_k\}\{{}_h{}^i{}_l\}-\{{}_j{}^h{}_l\}\{{}_h{}^i{}_k\})\alpha_i\\&=-R^i{}_{jkl}\alpha_i\end{aligned}\tag{5}$$

を得る．さらに一般のテンソル場，たとえば $(T^i{}_j)$ に対して同様の計算を行えば，次の交換公式を得る．

定理 6.1　スカラー場 f，反変ベクトル場 (v^i)，共変ベクトル場 (α_j) あるいはテンソル場 $(T^i{}_j)$ に対して次の公式が成り立つ．これらを**リッチの公式**という．

$$\nabla_l\nabla_kf-\nabla_k\nabla_lf=0$$

$$\nabla_l\nabla_kv^i-\nabla_k\nabla_lv^i=R^i{}_{jkl}v^j$$

$$\nabla_l\nabla_k\alpha_j-\nabla_k\nabla_l\alpha_j=-R^i{}_{jkl}\alpha_i$$

$$\nabla_l\nabla_kT^i{}_j-\nabla_k\nabla_lT^i{}_j=R^i{}_{hkl}T^h{}_j-R^h{}_{jkl}T^i{}_h$$

定理 6.2　式 (3) で定義された $R^i{}_{jkl}$ は (1, 3) テンソル場である．これを**曲率テンソル**という．さらに

$$R_{ijkl}=g_{ih}R^h{}_{jkl}\tag{6}$$

とおき，これを**曲率テンソルの共変成分**または**共変曲率テンソル**という．

[証 明]　座標変換 $(u^i)\to(u'^a)$ のもとでのクリストッフェルの記号の変換公式（§3，式 (7)）を微分して，それぞれの座標系における $R^i{}_{jkl}$，$R'^a{}_{bcd}$ を構成して比較することによって，(1, 3) テンソルの変換法則に従うことを確かめることができる．しかし，この計算はかなり複雑である．次のように考えることもできる．

任意のベクトル場 (v^i) に対して，$\nabla_l\nabla_kv^i$，$\nabla_k\nabla_lv^i$ は (1, 2) テンソルであるから，式 (4) の右辺

$$R^i{}_{jkl}v^j$$

は任意のベクトル (v^i) に対して (1, 2) テンソルを対応させる線形変換と考えることができる．ゆえに第4章 定理 4.2 により，$R^i{}_{jkl}$ は (1, 3) テンソルを構成する． ◇

定理 6.3 曲率テンソルは次の関係を満たしている．

$$(7) \qquad R^i{}_{jkl}+R^i{}_{jlk}=0, \qquad R_{ijkl}+R_{ijlk}=0$$

$$(8) \qquad R^i{}_{jkl}+R^i{}_{klj}+R^i{}_{ljk}=0, \qquad R_{ijkl}+R_{iklj}+R_{iljk}=0$$

これを**ビアンキの第1恒等式**という．さらに共変曲率テンソルについて

$$(9) \qquad R_{ijkl}+R_{jikl}=0$$

$$(10) \qquad R_{ijkl}=R_{klij}$$

式 (7) は R_{ijkl} が k と l について交代，式 (9) は i, j について交代，式 (10) は i, j と k, l の指標の組について対称であることを示している．

[証 明] 曲率テンソルの定義式 (3) は k と l について交代であるから式 (7) が導かれる．また式 (3) で j, k, l を循環的に入れ換えて加えれば0となり，ビアンキの恒等式 (8) が導かれる．

$\nabla_k g_{ij}=0$ である．これに (0, 2) テンソルに対するリッチの公式を適用すれば

$$\nabla_l\nabla_k g_{ij}-\nabla_k\nabla_l g_{ij}=-g_{ih}R^h{}_{jkl}-g_{hj}R^h{}_{ikl}=0$$

となり，これは式 (9) にほかならない．

式 (10) は前の3式 (7), (8), (9) を用いて次のように導かれる．

$$\begin{aligned}R_{ijkl}&=-R_{iklj}-R_{iljk}=R_{kilj}+R_{lijk}\\&=-(R_{klji}+R_{kjil})-(R_{ljki}+R_{lkij})\\&=R_{klij}+R_{jkil}+R_{jlki}+R_{klij}=2R_{klij}-R_{jilk}\\&=2R_{klij}-R_{ijkl}\end{aligned}$$

ゆえに

$$2R_{ijkl}=2R_{klij}$$ ◇

さて，いままでユークリッド空間の一般の曲線座標系 (u^i) の基本テンソル $\boldsymbol{g}=(g_{ij})$ から，クリストッフェルの記号 $\{{}_j{}^i{}_k\}$ を

$$\{{}_j{}^i{}_k\}=\frac{1}{2}g^{il}(\partial_k g_{jl}+\partial_j g_{kl}-\partial_l g_{jk})$$

で定義し，さらに曲率テンソル $R^i{}_{jkl}$ を式 (3) で定義して，$R^i{}_{jkl}$ がテンソルであることを見てきた．

ところが，実はユークリッド空間では次の定理が成り立つ．

定理 6.4 ユークリッド空間の曲率テンソル $R^i{}_{jkl}$ はつねに零テンソルである．

$$R^i{}_{jkl}=0$$

したがって，共変微分の順序は交換可能である．

［証 明］ 直交座標系または直線座標系 (x^a) において，定理 3.2 により $\{{}_b{}^a{}_c\}=0$ であり，定義式 (3) により $R^a{}_{bcd}=0$ である．曲率テンソルはテンソルの性質をもつから，任意の曲線座標系 (u^i) における成分 $R^i{}_{jkl}$ もすべて 0 である． ◇

この定理に従えば，本来 0 であるものを $R^i{}_{jkl}$ とおき，曲率テンソルという名称まで付けて計算してきたことになる．これが本節の初めに共変微分の交換公式を形式的に計算しようといった理由である．それならば，曲率テンソルが 0 でないような場合が考えられるであろうか．その話題に進む前に，次の定理と例を述べておこう．

定理 6.5 R_{ijkl} の指標 i, j, k, l が 1 から n まで変わるものとし，その間に代数的関係 (7) の第 2 式，(8) の第 2 式および (9)，(10) が成り立つとき，R_{ijkl} を曲率型の共変テンソルという．その独立な成分の個数 N は

$$N=\frac{1}{12}n^2(n^2-1)$$

である．

［証 明］ R_{ijkl} の成分のうち，指標が $i=j$ または $k=l$ であるようなものは，i と j または k と l についての交代性により 0 である．$i\neq j$ であるような番号の組合せを (i, j) で示すことにすればその総数 p は

$$p={}_n\mathrm{C}_2=\frac{1}{2}n(n-1)$$

である．(k, l) の組合せの総数も p である．したがって，R_{ijkl} の指標が (i, j) と (k, l) の組合せであるような成分の総数は p^2 である．式 (10) はこのような成分のうち，

(i, j) と (k, l) が同じ組合せであるものは等しいことを示している．そのような組合せの総数は ${}_p\mathrm{C}_2$ であり，p^2 個からその重複分を除いた成分の個数は

$$(11) \qquad p^2 - \frac{1}{2}p(p-1) = \frac{1}{2}p(p+1) = \frac{1}{8}n(n-1)(n^2-n+2)$$

である．

関係式 (8) で，i, j, k, l のうち少なくとも 2 つが同じ番号である場合，たとえば $i=l$ のとき $R_{iljk}=0$ であるから，

$$R_{ijkl} + R_{iklj} = 0$$

であり，これは (7) と (10) に含まれてしまう．ゆえに，式 (8) が独立な関係式となるのは i, j, k, l が互いに異なる番号の組合せである場合で，その個数は

$${}_n\mathrm{C}_4 = \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

である．ゆえに R_{ijkl} の独立な成分の総数は (11) から (8) の独立な関係式の個数を引いて

$$N = \frac{1}{24}n(n-1)\{3(n^2-n+2)-(n-2)(n-3)\} = \frac{1}{12}n^2(n^2-1)$$

である． ◇

R_{ijkl} の独立な成分の個数 N は，n の値に対して次のとおりである．

$$n = 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6$$
$$N = 1, \quad 6, \quad 20, \quad 50, \quad 105$$

$n=2$ の場合，独立な成分は R_{1221} がただ 1 つである．

例 6.1 極座標系に関する曲率テンソルの成分がすべて 0 であることを確かめよ．

［解］ R_{ijkl} の独立な成分の個数は 6 であり，また指標の番号は 1 から 3 までしか変わらないから，すべてが異なる場合はない．したがって次の 6 個の成分を調べればよい．例 3.1 の結果を用いて

$$\begin{aligned}
R^1{}_{212} &= \partial_2\{{}_2{}^1{}_1\} - \partial_1\{{}_2{}^1{}_2\} + \{{}_2{}^h{}_1\}\{{}_h{}^1{}_2\} - \{{}_2{}^h{}_2\}\{{}_h{}^1{}_1\} \\
&= 0 + \frac{\partial r}{\partial r} + \frac{1}{r}(-r) - 0 = 0 \\
R^1{}_{213} &= \partial_3\{{}_2{}^1{}_1\} - \partial_1\{{}_2{}^1{}_3\} + \{{}_2{}^h{}_1\}\{{}_h{}^1{}_3\} - \{{}_2{}^h{}_3\}\{{}_h{}^1{}_1\} = 0 \\
R^1{}_{223} &= \partial_3\{{}_2{}^1{}_2\} - \partial_2\{{}_2{}^1{}_3\} + \{{}_2{}^h{}_2\}\{{}_h{}^1{}_3\} - \{{}_2{}^h{}_3\}\{{}_h{}^1{}_2\} = -\frac{\partial r}{\partial \varphi} = 0 \\
R^1{}_{313} &= \partial_3\{{}_3{}^1{}_1\} - \partial_1\{{}_3{}^1{}_3\} + \{{}_3{}^h{}_1\}\{{}_h{}^1{}_3\} - \{{}_3{}^h{}_3\}\{{}_h{}^1{}_1\} \\
&= 0 + \sin^2\theta + \frac{1}{r}(-r\sin^2\theta) - 0 = 0
\end{aligned}$$

$$R^1{}_{323} = \partial_3\{{}_3{}^1{}_2\} - \partial_2\{{}_3{}^1{}_3\} + \{{}_3{}^h{}_2\}\{{}_h{}^1{}_3\} - \{{}_3{}^h{}_3\}\{{}_h{}^1{}_2\}$$
$$= 0 + 2r\sin\theta\cos\theta - r\sin\theta\cos\theta - r\sin\theta\cos\theta = 0$$
$$R^2{}_{323} = \partial_3\{{}_3{}^2{}_2\} - \partial_2\{{}_3{}^2{}_3\} + \{{}_3{}^h{}_2\}\{{}_h{}^2{}_3\} - \{{}_3{}^h{}_3\}\{{}_h{}^2{}_2\}$$
$$= 0 + (\cos^2\theta - \sin^2\theta) - \cos^2\theta + \sin^2\theta = 0$$
◇

§2 で，ユークリッド空間の曲線座標系（u^i）において，媒介変数方程式 $u^i = u^i(t)$ で表された曲線の長さは

$$\int_a^t \sqrt{g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}}\,dt \tag{12}$$

で与えられることを見てきた．ここに基本テンソルの成分（g_{ij}）は直交座標系に関する成分（δ_{ab}）から座標変換によって導かれたものであった．

いま，基本テンソルのこの性質を取り去って，各点が実数の組（u^i）で表されるような数空間において，対称かつ正定値な2階共変テンソル $\boldsymbol{g} = (g_{ij})$ が先在的に与えられているとき，曲線の長さを式（12）の積分で定義する．各点を表す実数の個数は一般に n 個であってもよく，このように曲線の長さが定義された空間を n 次元**リーマン空間**といい，これを出発点にして構成される幾何学を**リーマン幾何学**という．

第4章以後に述べてきた一般のテンソル代数および解析のうち，ユークリッド空間の特性に影響されない形式的な部分はリーマン空間にもそのまま適用される．たとえば §3 の式（6）によってクリストッフェルの記号 $\{{}_j{}^i{}_k\}$ が定義され，座標変換 $u'^a = u'^a(u^i)$ のもとでそれは §3 の変換法則（7）～（9）に従う．したがって，§4 の共変微分を定義することができ，クロネッカーのデルタ（$\delta_j{}^i$），基本テンソルの共変成分（g_{ij}），反変成分（g^{ij}）は共変的に一定である．さらに，曲率テンソル $R^i{}_{jkl}$ が式（3）で定義され，定理 6.1 のリッチの公式が成り立つ．リーマン空間では一般に曲率テンソルは0ではなく，共変微分の順序は可換ではない．曲率テンソル $R^i{}_{jkl}$ およびその共変成分 R_{ijkl} は定理 6.3 のすべての恒等式を満たしており，独立な成分の個数については定理 6.5 が成り立つ．リーマン幾何学についてこれ以上は言及しないが，次の例をあげておこう．

例 6.2　点の座標を（u_i）で示すことにする．基本2次形式が

$$ds^2 = \frac{(du_1)^2 + (du_2)^2 + (du_3)^2}{\left\{1 + \frac{k}{4}(u_1{}^2 + u_2{}^2 + u_3{}^2)\right\}^2} \qquad (k \text{ は定数})$$

で与えられるとき，基本テンソル，クリストッフェルの記号，曲率テンソルを求めよ．

［解］ ここでは下付きの指標についても総和の規約を適用することにする．

$$r^2 = u_1{}^2 + u_2{}^2 + u_3{}^2 = \delta_{ij} u_i u_j$$

$$\rho = 1 + \frac{k}{4}(u_1{}^2 + u_2{}^2 + u_3{}^2) = 1 + \frac{k}{4} r^2$$

とおけば

$$ds^2 = \frac{1}{\rho^2} \delta_{ij} du_i du_j$$

と書くことができ，基本テンソルの共変および反変成分は

$$g_{ij} = \frac{1}{\rho^2} \delta_{ij}, \qquad g^{ij} = \rho^2 \delta^{ij}$$

である．

簡単のために

$$\rho_j = \frac{\partial \rho}{\partial u_j} = \frac{k}{2} u_j$$

とおく．クリストッフェルの記号は

$$\left\{ {}_j{}^i{}_k \right\} = \frac{1}{2} \rho^2 \delta^{il} \left[\frac{\partial}{\partial u_j}\left(\frac{1}{\rho^2} \delta_{kl}\right) + \frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{1}{\rho^2} \delta_{jl}\right) - \frac{\partial}{\partial u_l}\left(\frac{1}{\rho^2} \delta_{jk}\right) \right]$$

$$= -\frac{1}{\rho}(\rho_j \delta_k{}^i + \rho_k \delta_j{}^i - \rho_i \delta_{jk})$$

$$= -\frac{k}{2\rho}(u_j \delta_k{}^i + u_k \delta_j{}^i - u_i \delta_{jk})$$

である．

$$\partial_l \left\{ {}_j{}^i{}_k \right\} = -\frac{k}{2\rho}(\delta_{jl} \delta_k{}^i + \delta_{kl} \delta_j{}^i - \delta_l{}^i \delta_{jk}) + \frac{k^2}{4\rho^2} u_l (u_j \delta_k{}^i + u_k \delta_j{}^i - u_i \delta_{jk})$$

$$\left\{ {}_j{}^h{}_k \right\} \left\{ {}_h{}^i{}_l \right\} = \frac{k^2}{4\rho^2}(2 u_j u_k \delta_l{}^i + u_j u_l \delta_k{}^i + u_k u_l \delta_j{}^i - u_i u_j \delta_{kl} - u_i u_k \delta_{jl} - r^2 \delta_{jk} \delta_l{}^i)$$

であるから，

$$R^i{}_{jkl} = \frac{k}{\rho}(\delta_{jk} \delta_l{}^i - \delta_{jl} \delta_k{}^i) - \frac{k^2}{4\rho^2} r^2 (\delta_{jk} \delta_l{}^i - \delta_{jl} \delta_k{}^i)$$

$$= \frac{k}{\rho^2}(\delta_{jk} \delta_l{}^i - \delta_{jl} \delta_k{}^i)$$

この成分は

$$R^i{}_{jkl} = k(g_{jk} \delta_l{}^i - g_{jl} \delta_k{}^i)$$

の形に表され，これはテンソル方程式である．

$k \neq 0$ ならば，このリーマン空間では曲率テンソルは0でない．$k>0$ の場合は，実はこの空間は半径が $1/\sqrt{k}$ の3次元球（の一部）である． ◇

このように曲率テンソルが0でない空間が存在するが，最後にユークリッド空間を特徴づけるものとして，定理 6.4 の逆を証明しよう．

定理 6.6 曲率テンソル $R^i{}_{jkl}$ が恒等的に0ならば，各点の近傍で直交座標系が存在する．このような空間は局所的にユークリッド空間であるという．

［証 明］ 定理 3.2 とそれに続く注意により，$\{{}_b{}^a{}_c\}'=0$ であるような直線座標系 (u'^a) が存在することをいえばよい．クリストッフェルの記号の変換法則 §3 の (9) により，そのような座標系は，曲線座標系 (u^i) に対して2階偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u'^a}{\partial u^j \partial u^k} = \frac{\partial u'^a}{\partial u^i}\{{}_j{}^i{}_k\} \tag{13}$$

の解である．

$$\frac{\partial u'^a}{\partial u^j} = A^a{}_j \tag{14}$$

とおけば，方程式 (13) は

$$\frac{\partial A^a{}_j}{\partial u^k} = A^a{}_i\{{}_j{}^i{}_k\} \tag{15}$$

となり，方程式 (14), (15) を $3+3^2=12$ 個の未知関数 u'^a と $A^a{}_i$ についての1階線形偏微分方程式系と考えることができる．

そのとき，(14), (15) を偏微分してさらにそれら自身を用いれば

$$\frac{\partial^2 u'^a}{\partial u^j \partial u^k} - \frac{\partial^2 u'^a}{\partial u^k \partial u^j} = \frac{\partial A^a{}_j}{\partial u^k} - \frac{\partial A^a{}_k}{\partial u^j} = A^a{}_i\{{}_j{}^i{}_k\} - A^a{}_i\{{}_k{}^i{}_j\}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 A^a{}_j}{\partial u^k \partial u^l} - \frac{\partial^2 A^a{}_j}{\partial u^l \partial u^k} &= A^a{}_i \frac{\partial}{\partial u^l}\{{}_j{}^i{}_k\} + \frac{\partial A^a{}_h}{\partial u^l}\{{}_j{}^h{}_k\} - A^a{}_i \frac{\partial}{\partial u^k}\{{}_j{}^i{}_l\} - \frac{\partial A^a{}_h}{\partial u^k}\{{}_j{}^h{}_l\} \\ &= A^a{}_i\left(\frac{\partial}{\partial u^l}\{{}_j{}^i{}_k\} + \{{}_j{}^h{}_k\}\{{}_h{}^i{}_l\} - \frac{\partial}{\partial u^k}\{{}_j{}^i{}_l\} - \{{}_j{}^h{}_l\}\{{}_h{}^i{}_k\}\right)\end{aligned}$$

であり，第1式は $\{{}_j{}^i{}_k\}$ の対称性により，第2式は仮定 $R^i{}_{jkl}=0$ により，ともに0になる．ゆえに偏微分方程式の理論により，方程式系 (14) と (15) は完全積分可能である．すなわち，任意の点 $(u^i{}_0)$ において任意の初期条件

$$u'^a(u^i{}_0) = u'^a{}_0, \qquad A^a{}_i(u^i{}_0) = A^a{}_{i,0}$$

を満足するような解 u'^a, $A^a{}_i$ が存在する． ◇

問　　題

1. 円柱座標系において，曲率テンソルが 0 であることを確かめよ．

2. 極座標系 (r, θ, φ) で $r=c$ は半径 c の球面を表すから，

$$ds^2 = c^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

は（2次元）球面上の線素を与える．$u^1=\theta$, $u^2=\varphi$ として，球面の曲率テンソルを求めよ．

3. $R_{jk} = R^i{}_{jki}$ とおいて，これをリッチのテンソルという．

（1） $R_{jk} = R_{kj}$ であることを証明せよ．

（2） 例 6.2 の空間の R_{jk} の式を求めよ．

4. 共変微分の括弧積 $[\nabla_l, \nabla_k]$ を，テンソル場 $\boldsymbol{T}$ に対して

$$[\nabla_l, \nabla_k]\boldsymbol{T} = \nabla_l\nabla_k\boldsymbol{T} - \nabla_k\nabla_l\boldsymbol{T}$$

と定義するとき，次の恒等式を証明せよ．

（1） **ヤコビの恒等式**

$$[\nabla_m, [\nabla_l, \nabla_k]] + [\nabla_l, [\nabla_k, \nabla_m]] + [\nabla_k, [\nabla_m, \nabla_l]] = 0$$

（2） **ビアンキの第2恒等式**

$$\nabla_m R^i{}_{jkl} + \nabla_l R^i{}_{jmk} + \nabla_k R^i{}_{jlm} = 0$$

［解　　答］

1. §3 の問題 **2**（1）の結果 $\{{}_2{}^1{}_2\} = -\rho$, $\{{}_1{}^2{}_2\} = 1/\rho$，その他の成分は 0 であるから，$R^i{}_{jkl}$ の指標が 1, 2 である成分だけを調べればよい．そのうち独立なものは

$$R^1{}_{221} = \frac{\partial}{\partial u^1}\{{}_2{}^1{}_2\} - \frac{\partial}{\partial u^2}\{{}_2{}^1{}_1\} + \{{}_2{}^1{}_2\}\{{}_1{}^1{}_1\} - \{{}_2{}^2{}_1\}\{{}_2{}^1{}_2\}$$
$$= -1 - 0 + 0 - (-1) = 0$$

2. 基本テンソルは

$$g_{11} = c^2, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = c^2\sin^2\theta$$
$$g^{11} = \frac{1}{c^2}, \qquad g^{12} = 0, \qquad g^{22} = \frac{1}{c^2\sin^2\theta}$$

クリストッフェルの記号のうち 0 でないものは

$$\{{}_2{}^1{}_2\} = -\sin\theta\cos\theta, \qquad \{{}_1{}^2{}_2\} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

曲率テンソルの成分のうち独立なものは

$$R^1{}_{221} = (-\cos^2\theta + \sin^2\theta) - (-\cos^2\theta) = \sin^2\theta = \frac{1}{c^2}\,g_{22}$$

曲率テンソルの恒等式および基本テンソルと比較して

$$R^i{}_{jkl} = \frac{1}{c^2}(\delta_l{}^i g_{jk} - \delta_k{}^i g_{jl})$$

の形に書くことができる.

3. (1) ビアンキの第1恒等式 (8) で i と l を縮約すれば

$$R^i{}_{jki} + R^i{}_{kij} + R^i{}_{ijk} = 0$$

$$R^i{}_{kij} = -R^i{}_{kji} = -R_{kj},\quad R^i{}_{ijk} = 0$$

であるから,

$$R_{jk} = R_{kj}.$$

(2)
$$R_{jk} = k(3g_{jk} - \delta_k{}^i g_{ji}) = 2kg_{jk}$$

ユークリッド空間では $R_{jk} = 0$ である. 一般にリッチのテンソルが

$$R_{jk} = \kappa g_{jk} \qquad (\kappa : \text{比例因数})$$

の形をしているリーマン空間を**アインシュタイン空間**という.

4. (1)
$$[\nabla_m, [\nabla_l, \nabla_k]] = \nabla_m[\nabla_l, \nabla_k] - [\nabla_l, \nabla_k]\nabla_m$$
$$= \nabla_m\nabla_l\nabla_k - \nabla_m\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k\nabla_m \quad \nabla_k\nabla_l\nabla_m$$

である. k, l, m を循環的に入れ換えて加えればよい.

(2) 任意のベクトル場 (v^i) に対して, リッチの公式により

$$[\nabla_l, \nabla_k]v^i = R^i{}_{jkl}v^j$$

である. ゆえに

$$\nabla_m[\nabla_l, \nabla_k]v^i = R^i{}_{jkl}\nabla_m v^j + (\nabla_m R^i{}_{jkl})v^j$$
$$[\nabla_l, \nabla_k]\nabla_m v^i = R^i{}_{jkl}\nabla_m v^j - R^h{}_{mkl}\nabla_h v^i$$
$$\therefore\quad [\nabla_m, [\nabla_l, \nabla_k]]v^i = (\nabla_m R^i{}_{jkl})v^j + R^h{}_{mkl}\nabla_h v^i$$

k, l, m を循環的に入れ換えて加えれば (1) のヤコビの恒等式により

$$(\nabla_m R^i{}_{jkl} + \nabla_l R^i{}_{jmk} + \nabla_k R^i{}_{jlm})v^j$$
$$+ (R^h{}_{mkl} + R^h{}_{lmk} + R^h{}_{klm})\nabla_h v^i = 0$$

v^i は任意であるから, v^j の係数から問題の恒等式が導かれる. $\nabla_h v^i$ の係数からはビアンキの第1恒等式が得られる.

索　引

ア

イ

ウ

エ

オ

カ

キ

ク

ケ

コ

サ

シ

ス

セ

ソ

タ

チ

テ

ト

ナ

ハ

ヒ

フ

ヘ

ホ

著者略歴
1926 年（大正 15 年）長野県出身　旧制松本高等学校，東京大学理学部数学科卒業，岡山大学助手，同助教授，同教授，同教養部長（併任），広島大学教授，広島工業大学教授を経て現在岡山大学および広島大学名誉教授　理学博士．
主な著書　社会科学者のための基礎数学（共著，裳華房），線形数学，ラプラス変換とフーリエ解析要論（以上森北出版），理工系の微分積分学，応用解析学，確率と統計要論（以上共著，森北出版），数学ハンドブック応用編（第三章執筆，朝倉書店），古典幾何学（新曜社），Conformal Transformations in Complete Riemannian manifolds（幾何学総合研究報告，vol. 3）．

基礎数学選書 23　テンソル解析

1981 年 2 月 15 日　第 1 版発行©
2006 年 3 月 10 日　第17版発行

検印
省略

定価はカバーに表示してあります．

著作者　田代嘉宏（たしろよしひろ）
発行者　吉野達治
発行所　東京都千代田区四番町 8 番地
電話　東京 3262—9166〜9
株式会社　裳華房
印刷所
株式会社デジタルパブリッシングサービス
製本所

社団法人
自然科学書協会会員

ISBN 4-7853-1125-8

Printed in Japan